

Diplomarbeit

Definitionen und Berechnungen der Platonischen und Archimedischen Polyeder

Sommersemester 2001,
Mathematische Fakultät, Schwerpunkt Geometrie und Diskrete
Mathematik,
Universität Hamburg

Marco Möller, Matrikelnummer 4912116

18. Juni 2001



Betreut durch Prof. Dr. Alexander Kreuzer,
Zweitkorrektor Prof. Dr. Eberhard Schröder

Ich danke allen meinen Professoren, insbesondere Herrn Prof. Dr. Alexander Kreuzer, für die tatkräftige Unterstützung während meines Studiums. Außerdem danke ich meiner Oma und meiner Freundin, daß sie immer an mich geglaubt und mich zum Weitermachen animiert haben.

Hiermit bestätige ich, daß ich die hier vorliegende Diplomarbeit selbständig und ohne fremde Hilfe angefertigt und keine weiteren Quellen außer den angegebenen verwendet habe.

Hamburg, den 18. Juni 2001

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
2	Definitionen	9
2.1	Allgemeine Dinge	9
2.2	Regel- und Halbbregelmäßigkeit von Polyedern	10
2.3	Symmetrien bei Polyedern	12
3	Platonische Polyeder	15
3.1	Historisches	15
3.2	Definition der Platonischen Polyeder	16
3.3	Der Hexaeder oder Würfel $\{P_6\}$	16
3.4	Der Tetraeder $\{P_4\}$	17
3.5	Der Oktaeder $\{P_8=Py_4+Py_4\}$	18
3.6	Der Ikosaeder $\{P_{20}=Py_5+APr_5+Py_5\}$	19
3.7	Der Dodekaeder $\{P_{12}\}$	21
3.8	Übersicht	22
3.9	Gibt es noch mehr?	23
4	Archimedische Polyeder	25
4.1	Historisches	25
4.2	Eine Definition der Archimedischen Polyeder	25
4.3	Vorüberlegungen	25
4.4	Wie viele Archimedische Polyeder gibt es?	32
4.5	Konstruktion unter Ausnutzung der Symmetrien	38
4.6	Der Stumpfe Tetraeder $\{TP_4\}$	40
4.7	Der Stumpfe Hexaeder $\{TP_6\}$	41
4.8	Der Stumpfe Oktaeder $\{TP_8\}$	42
4.9	Der Stumpfe Dodekaeder $\{TP_{12}\}$	43
4.10	Der Stumpfe Ikosaeder $\{TP_{20}\}$	45
4.11	Der Kubo-Oktaeder $\{C_8=(C_3+C_3)_{[reg]}\}$	46
4.12	Der Ikosi-Dodekaeder $\{I_{12}=(R_5+R_5)_{[reg]}\}$	47
4.13	Zwischenbetrachtung für die nächsten vier Polyeder	49
4.14	Der Romben-Kubo-Oktaeder $\{RC_8=(C_4+Pr_8+C_4)_{[reg]}\}$	51
4.15	Der Große Romben-Kubo-Oktaeder $\{gRC_8\}$	53
4.16	Der Romben-Ikosi-Dodekaeder $\{RI_{12}=(RI_{12}^{-3}+3\cdot C_5)_{[reg]}\}$	54
4.17	Der Große Romben-Ikosi-Dodekaeder $\{gRI_{12}\}$	57
4.18	Der Schräge Hexaeder $\{S_6^{[l]}\}$	60
4.19	Der Schräge Dodekaeder $\{S_{12}^{[l]}\}$	63
4.20	Übersicht	67
5	Bauanleitungen	72
5.1	Allgemeines	72

A Die Programme	81
A.1 zum Seitenkosinus- und Winkelkosinussatz	81
A.2 zum Schrägen Hexaeder	84
A.3 zum Schrägen Dodekaeder	85
A.4 zum vierten Programm	89
B Berechnungen	93
C elektronische Hilfsmittel	96
D Abkürzungen	97

Abbildungsverzeichnis

1	Romben-Polyeder	8
2	stellare Polyeder	8
3	Deltaeder	11
4	Honeycombs	11
5	Heptaeder	11
6	Gleichheit von Objekten	14
7	ein halbbregelmäßiger Polyeder	14
8	ein weiterer halbbregelmäßiger Polyeder	14
9	Platons 3-Ecke	15
10	Platons Elemente	16
11	Hexaeder oder Würfel	17
12	Tetraeder im Hexaeder	18
13	Tetraeder	18
14	Oktaeder	19
15	Konstruktion zweier Ikosaeder-Punkte auf einer Hexaeder-Fläche	20
16	Ikosaeder	20
17	Konstruktion zweier Dodekaeder-Punkte über der Hexaeder-Fläche	21
18	Dodekaeder	22
19	Übersicht: Platonische Polyeder	24
20	Verdrehung einer Kuppel	31
21	Kupola und Rotunda	32
22	Prismen und Antiprismen	32
23	Übersicht: Archimedische Polyeder	39
24	Stumpfer Tetraeder	41
25	Stumpfer Hexaeder	42
26	Stumpfer Oktaeder	43
27	Stumpfer Dodekaeder	45
28	Stumpfer Ikosaeder	46
29	Kubo-Oktaeder	47
30	Ikosi-Dodekaeder	48
31	Romben-Kubo-Oktaeder	52
32	Millers Körper	53
33	Großer Romben-Kubo-Oktaeder	54
34	Konstruktion des Romben-Ikosi-Dodekaeders	55
35	Romben-Ikosi-Dodekaeder	56
36	Konstruktion des Großen Romben-Ikosi-Dodekaeders	58
37	Großer Romben-Ikosi-Dodekaeder	60
38	Die beiden Isomere des Schrägen Hexaeders	61
39	Berechnung des Schräger Hexaeders	62
40	Schräger Hexaeder	62
41	Die beiden Isomere des Schrägen Dodekaeders	63
42	Berechnung des Schräger Dodekaeders	65
43	Schräger Dodekaeder	66
44	Die Platonischen und Archimedischen Polyeder	69

45	Foto einiger Papiermodelle	70
46	Polyeder in Biologie, Mineralogie, etc.	71

1 Einleitung

„Geometrie ist sowohl die Kunst der Augen und Hände als auch des Geistes.“

J. Pederson

In dieser Arbeit möchte ich mich mit einem der ältesten Teilgebiete der Geometrie befassen, mit regelmäßigen Polyedern. Die Wurzeln dieses Teilgebietes gehen zurück bis vor die Zeit um 500 vor Christus. Erstmalige umfangreichere Arbeiten wurden wahrscheinlich erst um 400 vor Christus von dem Griechen Platon von Athen (er hieß eigentlich Aristokles!) durchgeführt. Obwohl es sichere Indizien gibt, daß auch er viele Ideen von anderen Autoren übernommen hatte, werden die fünf regelmäßigen Polyeder ihm zugesprochen und zu seinem Andenken die Platonischen Polyeder/Körper genannt. Platon beschreibt Polyeder „höchster Perfektion und Harmonie“, die nur aus gleichen Flächen bestehen und die Flächen selber alle gleich lange Kanten und gleich große Winkel haben (also selbst regelmäßig sind). Seine Arbeiten über diese Körper hatten nicht nur einen großen Einfluß auf die Geometrie im Speziellen und die Mathematik im Allgemeinen, sondern auch auf die Philosophie (jedes der fünf Polyeder wurde mit einem Element – Wasser, Luft, Erde, Feuer und dem Geist, Himmel oder Ether – identifiziert), die Astronomie (Keplers Modell des Universums), die Astrologie und auf viele andere Wissensgebiete.^[1, Kap. 2, 3]

Weitere Arbeiten zu regelmäßigen Polyedern folgten um 250 vor Christus von dem Griechen Archimedes von Syracus. Er beschreibt dreizehn Polyeder, deren Flächen alle regelmäßig aber nicht gleich sind. Auch diese Arbeiten über die Archimedischen Polyeder hatten großen Einfluß auf viele Wissensgebiete, wenn auch nicht so großen wie die von Platon.

Richtig populär wurden sowohl die Platonischen als auch die Archimedischen Polyeder allerdings erst im 15. und 16. Jahrhundert durch die Entwicklung des perspektivischen Zeichnens. Zahlreiche Publikationen aus dieser Zeit von Wenzeln Jamnitzer^[7], Albrecht Dürer^[8], Johannes W. Kepler^[4,5,6] und anderen beweisen die Faszination dieser Zeitepoche an der Schönheit und Harmonie, an der Symmetrie und Perfektion (und der Herausforderung des richtigen, perspektivischen Zeichnens) dieser regelmäßigen Polyeder. Viele der Platonischen und Archimedischen Polyeder finden sich auch wieder in Gemälden, Ornamentierungen und als Skulpturen dieser Zeit.

Durch den vorliegenden Text werde ich versuchen, diese Faszination für regelmäßige Polyeder, wie sie damals in den Köpfen ganzer Generationen gesteckt hat, im Leser zu wecken und einen Einblick in die Materie zu geben.

Ich werde die grundlegenden Ideen und Begriffe über die Platonischen Körper herausarbeiten, zeigen, wie viele es gibt und sie dann konstruieren. Anschließend werde ich versuchen, Halbregelmäßigkeit zu definieren, und als Polyeder

mit solcher Eigenschaft die Archimedischen Körper beschreiben. Hier werde ich auch zuerst allgemeine Aussagen machen, dann die Anzahl der Mitglieder dieser Familie von Polyedern bestimmen und sie anschließend konstruieren. Zu guter Letzt werde ich noch einige Bauanleitungen vorstellen.

Anbei habe ich Papiermodelle (Foto Seite 70) aller erwähnten Polyeder hergestellt und werde vielerorts anhand dieser die Konstruktionen, Berechnungen und Symmetrien erklären. Sollten die Modelle während des Lesens allerdings nicht zur Hand sein, helfen sicher ein gutes räumliches Vorstellungsvermögen und die Abbildungen innerhalb des Textes.

Und für alle, die der Faszination dieser „perfekten“ Körper verfallen, kann ich nur empfehlen, sich selber ein paar Modelle zu bauen, um sie im wahrsten Sinne des Wortes besser zu begreifen. Eine Warnung sollte ich aber auch geben: Das Bauen der Modelle kann süchtig machen; ist ein Polyeder fertig gestellt, so ruft auch schon der nächste förmlich nach Herstellung. Und sind alle Polyeder dieser Familie gebaut, warten neue andere Polyedertypen wie Romben- oder stellare Polyeder darauf, gebaut zu werden.^[1, Kap. 2]

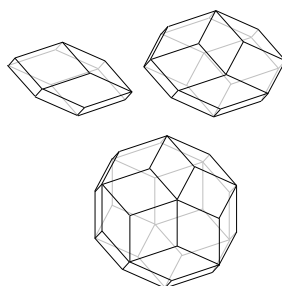


Abbildung 1: Romben-Polyeder

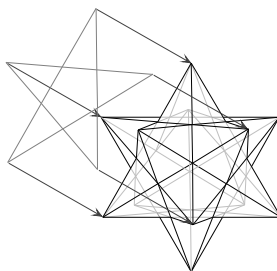


Abbildung 2: stellare Polyeder (hier regelmäßiger Polyeder aus zwölf Pentagrammen)

2 Definitionen

„Es ist wichtig darauf zu achten, daß Bezeichnungen Entdeckungen erleichtern. In wundervoller Weise kann man so die Arbeit des Geistes reduzieren.“

Gottfried Wilhelm Leibniz

„Ein Mathematiker, der fragt ‚In welchem Raum arbeitest du?‘ bezieht sich nicht auf die Größe deines Büros.“

Ian Stewart

2.1 Allgemeine Dinge

Um abstrakte Begriffe mit Inhalt zu füllen und um sicher zu gehen, daß alle von dem Gleichen reden und sich vorstellen, muß ich einige Wortbedeutungen festlegen. Denn viele Begriffe der anschaulichen Geometrie sind allen bekannt (wie Punkt, Linie, Fläche), doch bedarf es manchmal zusätzlichen Einschränkungen, um den folgenden Aussagen die nötige Eindeutigkeit zu verleihen. So meine ich mit Flächen ebene Flächen und nicht Flächen auf z.B. einer Kugel. Auch sind Linien immer gerade.

Desweiteren helfen Definitionen, die Sätze in einem Text kürzer zu halten: So meine ich im Folgenden mit Polyeder immer geometrische Gebilde, die vier Bedingungen erfüllen:

1. Die Polyeder sind geschlossene Teilräume begrenzt durch ebene (endliche) Flächen.
2. Die Grenzflächen sind ausschließlich regelmäßige n -Ecke; das heißt insbesondere, daß alle Innenwinkel einer Fläche und alle Kantenlängen eines Polyeders gleich sind.
3. Die betrachteten Polyeder sollen ausnahmslos konvex sein; damit meine ich, daß jede (gerade) Linie zwischen zwei beliebigen Punkten eines Polyeders vollständig innerhalb des Polyeders (einschließlich seiner Grenzflächen) verläuft.
4. Und zuletzt sollen alle betrachteten Polyeder endliche Ausdehnung haben, also nicht den 3-dimensionalen Raum in zwei Teilräume teilen; aber auch echt-räumlich sein (also nicht Volumen null haben). Somit können wir als Bedingung fest legen, daß aneinander grenzende Flächen nicht koplanar sein dürfen.

Wenn ab jetzt also irgendwo in diesem Text Polyeder auftaucht, sind damit nur die Polyeder gemeint, die hier beschrieben werden, es sei denn, es steht explizit etwas anderes da.

Und wenn von n -Ecken (z.B. 4-Eck, 5-Eck usw.) die Rede ist, meinen wir regelmäßige n -Ecke, deren Kanten gleich lang und deren Winkel gleich groß sind.

Auch die Frage nach dem (geometrischen) Raum ist für Mathematiker interessant: Alle betrachteten Polyeder befinden sich im 3-dimensionalen, unendlichen, Euklidischen Anschauungsraum. Dies ist z.B. nötig, um sicher zu gehen, daß parallele Geraden existieren.

2.2 Regel- und Halbregelmäßigkeit von Polyedern

Als regelmäßige Polyeder definieren wir im Folgenden diejenigen Polyeder, deren Flächen alle regelmäßig und gleich sind und an deren Ecken immer gleich viele und gleiche Flächen zusammen stoßen.

Unabhängig von der Regelmäßigkeit der Flächen und der Ecken lassen sich regelmäßige Polyeder aber auch anders definieren (H.S.M. Coxeter): Es existieren drei Sphären um den selben Mittelpunkt, sodaß alle Eckpunkte auf einer Sphäre, alle Kantenmittelpunkte auf der zweiten und alle Flächenmittelpunkte auf der letzten Sphäre liegen. Beide Definitionen sind gleichbedeutend.

Halbregelmäßigkeit läßt sich leider nicht so einfach definieren, da mehrere Bedingungen zur Auswahl stehen, die gelockert werden könnten. So führt das Weglassen der Forderung nach regelmäßigen Flächen unter anderem zu einer Familie von halbregelmäßigen Polyedern (z.B. Romben-Polyeder auf Seite 8, Abbildung 1); oder das Weglassen der Forderung nach gleichen Flächen unter anderem zu den Archimedischen Körpern.

Denkbare Familien halbregelmäßiger Polyeder sind:

- konvexe Polyeder, bestehend aus mindestens zwei verschiedenen Flächen, alle Eck-Konfigurationen¹ sollen aber gleich sein (siehe die Archimedischen Polyeder ab Seite 25).
- konvexe Polyeder, wobei alle Flächen gleich, die Eck-Konfigurationen aber verschieden sind (z.B. Deltaeder auf der folgenden Seite, Abbildung 3).
- konvexe Polyeder, bei denen mindestens zwei verschiedene Flächen auftreten und die Eck-Konfigurationen verschieden sind.
- konkave² Polyeder mit gleichen Flächen und Eck-Konfigurationen (z.B. Honeycombs auf der nächsten Seite).

¹Das sind die Konfigurationen von Flächen um eine Ecke herum, also z.B. 4-Eck-4-Eck-4-Eck – kurz (4,4,4) – für jede Ecke eines Würfels.

²konkav heißt, daß der Körper nicht konvex ist, es also Gerade zwischen Punkten des Körpers gibt, die teilweise außerhalb des Körpers verlaufen. Konkav wäre z.B. ein Stern, da die Verbindungslinien benachbarter Sternspitzen nicht im Stern verlaufen.

- konvexe Polyeder, deren Flächen nicht regelmäßige n -Ecke, sondern z.B. Romben sind (Romben-Polyeder auf Seite 8).
- Polyeder, deren Flächen und Eck-Konfigurationen gleich sind, deren Flächen sich aber durchdringen dürfen. (z.B. stellare Polyeder auf Seite 8)
- nicht geschlossene Polyeder mit diversen Nebenbedingungen (z.B. Heptaeder auf dieser Seite).

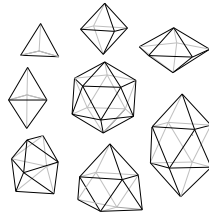


Abbildung 3: Die acht Deltaeder (bestehen nur aus 3-Ecken)

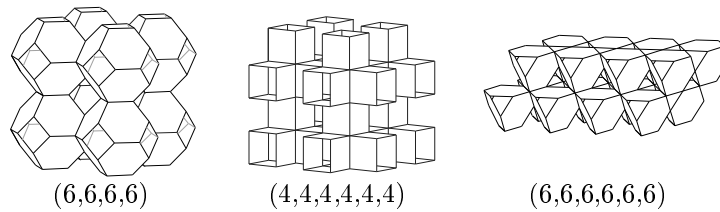


Abbildung 4: Die drei Honeycombs (raumausfüllende, konkave regelmäßige Polyeder)

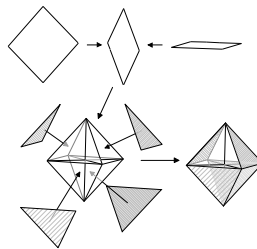


Abbildung 5: Der Heptaeder (bestehend aus sieben Flächen; drei 4-Ecken und vier 3-Ecken)

All diese Familien lassen sich auf Gemeinsamkeiten geometrischer Natur, auf Symmetrien, auf Ästhetik, auf natürliches Vorkommen (in Biologie, Mineralogie etc. – siehe auch Seite 71) und auch einfach auf die Anzahl der Familienmitglieder untersuchen.

Um die folgenden Betrachtungen in einem noch überschaubaren Rahmen zu halten, möchte ich mich auf die konvexen Polyeder beschränken, deren Flächen regelmäßig und deren Eck-Konfigurationen alle gleich sind. Dies sind die Platonischen und die Archimedischen Polyeder zusammen mit den Prismen und Antiprismen.

2.3 Symmetrien bei Polyedern

Die Euklidische Geometrie, der wir hier folgen, nennt sich auch die Geometrie der Bewegungen. Das heißt, es existieren Verschiebungen (Translationen), Drehungen um beliebige Achsen und Spiegelungen an beliebigen Ebenen. Als Bewegung bezeichnen wir jede Kombination von Translation, Drehung und Spiegelung. Bei jeder Bewegung bleiben Größen wie Länge, Winkel und Radius unverändert.

Zwei Gebilde bezeichnen wir als kongruent zueinander, wenn es eine Bewegung gibt, sodaß wir das eine Gebilde in das andere überführen können. Im allgemeinen Sprachgebrauch bezeichnet man sie dann auch als gleich. Somit sind Symmetrien Bewegungen, die ein Gebilde, hier Polyeder, in sich selber überführen; der Polyeder vor der Bewegung ist kongruent mit dem Polyeder nach der Bewegung.

In der Ebene hat das regelmäßige 6-Eck z.B. 6 Dreh-Symmetrien (Drehung um 60° , um 120° , um 180° , um 240° , um 300° und um 360°) und sechs Spiegel-Symmetrien (je eine an der Linie zwischen zwei gegenüberliegenden Ecken und eine zwischen den Kantenmittelpunkten gegenüber liegender Kanten). Hierbei ist die 360° -Drehung gleich der Identitätsbewegung. Ein rechtwinkliges 3-Eck mit verschiedenen langen Schenkeln hat dagegen keine Symmetrien (d.h. nur die Identitätsbewegung – es ist mit sich selber identisch).

Bei den Platonischen Polyedern können wir ein sehr hohes Maß an Symmetrie feststellen: Jeder Baustein (also Ecke, Kante und Fläche) gibt uns eine oder mehrere Symmetrien. Wir können jeden dieser Polyeder so in die Hand nehmen, daß wir ihn nur mit zwei Fingern an gegenüberliegenden Ecken berühren. Nun existieren genau so viele Dreh-Symmetrien an diesen Ecken, wie Kanten an sie stoßen. Genauso können wir mit zwei Fingern die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Flächen berühren; es existieren so viele Dreh-Symmetrien, wie Kanten an die Fläche stoßen bzw. von welchem Typ die Fläche ist (z.B. 6-Eck). Und beim Berühren der Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten bekommen wir auch je zwei Dreh-Symmetrien, einmal halb herum, einmal ganz. Außerdem kann an jeder Ebene, die senkrecht zu einer Kante steht und durch dessen Mittelpunkt geht, gespiegelt werden.

Einzigste Ausnahme ist der Tetraeder; da er selbst-dual ist (siehe auch Seite 22), sind die Flächen- und Eck-Symmetrien gleich und wir müssen diesen Polyeder so zwischen zwei Finger nehmen, daß wir eine Spitze und den gegenüber liegenden Flächenmittelpunkt berühren. Dann können wir analoge Aussagen machen.

Um die Gesamtzahl der Symmetrien eines Polyeders zu bestimmen, müssen wir allerdings darauf achten, keine der Symmetriebewegungen doppelt zu zählen (bei jeder der oberen Drehbewegungen tritt zum Beispiel die 360° -Drehung auf). Aus diesem Grunde zählen wir diese Identitätsbewegung nur einmal mit.

Bei den Archimedischen Polyedern ist das Maß an Symmetrie schon geringer: Auch hier finden wir für jeden dieser Polyeder auf jedem gegenüberliegenden Flächenpaar (Ausnahme der Stumpfe Tetraeder) so viele Dreh-Symmetrien wie Kanten an der Fläche liegen, nur bei den Eck- und Kantendrehungen finden wir nicht die Anzahl der Symmetrien, wie es bei den Platonischen Polyedern beschrieben ist. Grenzen zum Beispiel Flächen gleichen Typs aneinander, so existiert die Dreh-Symmetrie (180° -Drehung) an der Kante, andernfalls nicht. Und sind die Eck-Konfigurationen „symmetrisch“, das heißt $(3,4,3,4)$ oder $(3,5,3,5)$, dann existiert auch eine Dreh-Symmetrie an der Ecke, allerdings nur die 180° Drehung; bei „unsymmetrischer“ Eck-Konfiguration existiert keine Dreh-Symmetrie an der Ecke. Abgesehen davon finden wir aber wie bei den Platonischen Polyedern auch hier für jede Kante eine Spiegelebene, die den Polyeder in sich selber überführt. Auch treten viele Spiegelebenen mehrfach (für verschiedene Kanten) auf.

Aus all diesen Symmetrien resultiert eine schöne und praktische Eigenschaft der Platonischen wie auch Archimedischen Polyeder: Wir können jede Ecke eines dieser Polyeder durch eine geeignete Bewegung in eine andere Ecke überführen. Dies hat weitreichende Konsequenzen in der Beschreibung, der Beweisführung und der Berechnung der Koordinaten der Eckpunkte.

Denn jede Aussage über die Umgebung einer Ecke, das heißt die Anzahl und Typen der angrenzenden Flächen, der Winkel zwischen diesen etc., gilt für alle Ecken und genügt deshalb zur Beschreibung des gesamten Polyeders. Diesen Sachverhalt werden wir später bei den Beweisen zur Mitgliederanzahl der Platonischen und Archimedischen Polyeder und der einfachen und genauen Berechnung der Eck-Koordinaten benutzen.

Auf eine etwas philosophischere Frage müssen wir aber noch eingehen: Wann sind zwei Gebilde gleich? Wenn wir eine Bewegung, wie sie oben definiert ist, finden, die das eine Gebilde in das andere überführt. Nun, sind denn zwei Handschuhe gleich? Nein, es gibt linke und rechte Handschuhe. Sicher können wir eine Spiegelung finden, die den linken Handschuh in den rechten überführt. Trotzdem sind sie aber doch irgendwie anschaulich verschieden. Worauf ich hinaus will, ist, daß wir in einem „orientierten“ Anschauungsraum leben, es also links, rechts, oben, unten, vorne und hinten gibt. Und daß wir davon – insbesondere bei den Konstruktionsbeschreibungen auf den folgenden Seiten – reichlich

Gebrauch machen, obwohl diese Begriffe rein mathematisch nicht definiert sind (und eine solche Definition diesen Rahmen sprengen würde). Es können also Gebilde, sprich Polyeder, existieren, die kongruent sind, aber trotzdem irgendwie anders (gespiegelt) aussehen und wir sie als Modell in der Hand haltend nicht durch eine (nicht-mathematische) Bewegung ineinander überführen können.

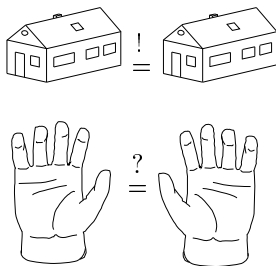


Abbildung 6: Wann sind zwei Objekte gleich?

Zum Schluß muß noch gesagt werden, daß der Maßstab, das heißt die Größe der Polyeder im Folgenden nicht relevant ist. Die konstruierten Polyeder werden zwar verschiedene Kantenlängen haben, bei der Frage der Gleichheit machen wir es uns aber einfach und nennen zwei Hexaeder bzw. Würfel gleich, auch wenn die Kantenlängen verschieden sind. Dies können wir machen, da es uns ja nur um die mathematischen Modelle geht und nicht um einen konkreten Hexaeder einer bestimmten Kantenlänge. Unsere Aussagen sollen für alle gelten. Mathematisch gesehen müssen wir also bei den Bewegungen oben die Streckung mit aufnehmen. Wir betrachten damit aber im Grunde genommen ähnliche Gebilde und nicht nur kongruente!



Abbildung 7: ein halbbregelmäßiger Polyeder (Biluna-Birutunda)

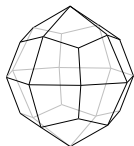


Abbildung 8: ein weiterer halbbregelmäßiger Polyeder (aus der Familie der Katalanschen Körper)

3 Platonische Polyeder

„Der Geometer schätzt an seiner Wissenschaft, daß er sieht, was er denkt.“

Felix Klein

„Die ersten wichtigen Begriffe der Topologie wurden erworben im Verlaufe der Studien der Polyeder.“

Henri Lebesque

3.1 Historisches

In den Werken, die uns von Platon erhalten geblieben sind, philosophiert er mit seinen Zeitgenossen über den Aufbau der Materie und entwickelt so mit ihnen die ersten Ansätze der Theorie, daß alle Materie aus wenigen Grundbausteinen, sogenannten Atomen, zusammengesetzt ist.^[1, Kap. 2]

Diese Elemente, Wasser, Erde, Luft und Feuer, haben gewisse Eigenschaften, die sich in den Atomen wiederfinden müßten. Und diese vier verschiedenen Atomsorten kombiniert würden dann verantwortlich sein für die große Anzahl an verschiedenen Materialien, die es auf der Welt gibt (Auch der Genetische Kode besteht nur aus vier verschiedenen Bausteinen, und doch gibt es eine immens große Artenvielfalt!).^[1, Kap. 2]

Platon stellt sich vor, daß Feuer, Wasser, Erde und Luft Körper seien. Und Körper sind massiv; grenzen aneinander an ebenen Flächen; die Flächen sind 3-Ecke. Weiter stellt er sich vor, es gebe nur zwei Typen von 3-Ecken, beide rechtwinklig, einer gleichschenkelig, der andere nicht gleichschenkelig. Durch Zusammensetzen dieser Flächen erhält er die beiden einfachsten Flächen; ein regelmäßiges 3-Eck und ein Quadrat. Und daraus konstruiert er dann die vier perfektsten Polyeder, deren Ecken alle auf einer Sphäre liegen müssen und sie in gleich große Oberflächenteile teilt.^[1, Kap. 2]

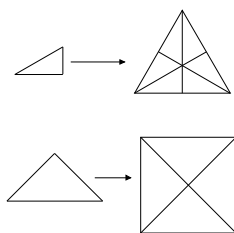


Abbildung 9: Platons 3-Ecke und die resultierenden zwei einfachsten Flächen

Er erhält so den Tetraeder, den Oktaeder und den Ikosaeder aus dem Dreieck und den Hexaeder aus dem Quadrat.

Außerdem sagt er: „Es bleibt noch eine fünfte Konstruktion, welche Gott benutzte, um den gesamten Himmel mit den Konstellationen zu verzieren.“^[1, Kap. 2]

Danach erklärt Platon deren Eigenschaften: So ist der Hexaeder, da er stapelbar ist und Stabiles hervorbringt, die Erde. Der Tetraeder ist der kleinste und leichteste und mit den schärfsten Spitzen und somit mit dem Feuer gleich zusetzen. Der Oktaeder ist rund wie der Ikosaeder, aber leichter, also Luft, während viele Ikosaeder verlaufen wie Wasser, da sie sehr rund sind. Über den Dodekaeder läßt er sich nicht weiter aus.^[1, Kap. 2]

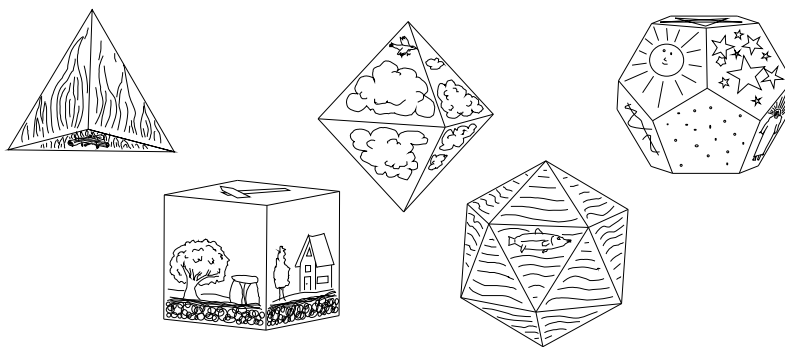


Abbildung 10: Platons Elemente

„Obwohl diese Analogien akzeptabel seien,“ kommentiert er zum Schluß, „sind sie nicht unbedingt zwingend, sondern vielmehr noch offen für weitere Diskussionen.“^[1, Kap. 2]

3.2 Definition der Platonischen Polyeder

Als Platonische Polyeder oder Körper bezeichnen wir diejenigen konvexen Polyeder, die nur aus gleichen und regelmäßigen n -Ecken bestehen und deren Eckenkonfigurationen alle gleich sind.

3.3 Der Hexaeder oder Würfel $\{P_6\}$

Ausgehend von einem Koordinatenkreuz, dessen x -Achse vom Ursprung nach rechts, dessen y -Achse nach vorne und dessen z -Achse nach oben wegläuft, wollen wir jetzt den einfachsten aller Polyeder konstruieren. Dazu setzen wir auf allen Achsen bei -1 und 1 eine Ebene senkrecht zur Achse. Der von diesen sechs Ebenen eingeschlossene Teilraum ist der Hexaeder. Die Koordinaten der Eckpunkte des Hexaeders sind somit die Schnittpunkte der Ebenen:

$$\begin{array}{cccc} 1; 1; 1 & -1; 1; 1 & 1; -1; 1 & -1; -1; 1 \\ 1; 1; -1 & -1; 1; -1 & 1; -1; -1 & -1; -1; -1 \end{array}$$

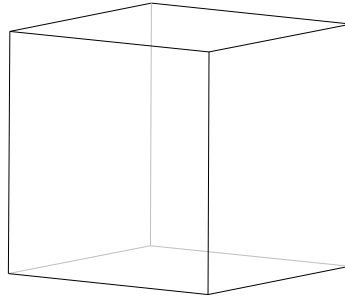


Abbildung 11: Hexaeder oder Würfel

Aufgebaut ist der Hexaeder aus sechs 4-Ecken, acht Ecken und zwölf Kanten. An jeder Ecke stoßen drei Kanten bzw. Flächen aneinander. Der so konstruierte Hexaeder hat die Kantenlänge 2.

Der Hexaeder besitzt drei Dreh-Symmetrieachsen senkrecht zu jedem (parallelen) Flächenpaar mit den Drehungen 90° , 180° , 270° und 360° ; sechs Dreh-Symmetrieachsen durch gegenüberliegende Kanten mit der Drehung 180° und 360° und vier Dreh-Symmetrieachsen durch gegenüberliegende Ecken mit den Drehungen 120° , 240° und 360° . Außerdem finden wir drei Spiegel-Symmetrien an den Ebenen senkrecht zu den drei Kantenquadrupeln und sechs Spiegel-Symmetrien an den Ebenen, die durch je zwei gegenüberliegenden Kanten gebildet werden. Die Dreh-Symmetrien können auch kürzer geschrieben werden: Es gibt an den Flächen drei 4-Symmetrien, an den Kanten sechs 2-Symmetrien und an den Ecken vier 3-Symmetrien.

Basierend auf dem Hexaeder wollen wir nun die anderen vier Platonischen Körper konstruieren, wobei wir uns seine Symmetrien zu Nutze machen und gewisse Schritte nur einmal erklären (und rechnen), obwohl sie auf jeder Kante, Fläche oder Ecke passieren.

Hinter der Überschrift dieses (und folgender) Unterabschnitte steht die Kurzschreibweise; für den Hexaeder $\{P_6\}$. Das P steht für Platonisch, die Zahl für die Anzahl der Flächen, hier 6 (=hexa).

3.4 Der Tetraeder $\{P_4\}$

Um den Tetraeder zu erhalten, ist es am einfachsten, vom Hexaeder ausgehend, sich auf jeder seiner Flächen eine Diagonale vorzustellen in einer Art und Weise, daß an den Hexaeder-Ecken immer entweder drei Diagonalen oder keine Diagonale zusammen kommen und zum Schluß die Ecken ohne Diagonale mit samt den

Hexaeder-Kanten wegzulassen. Anders ausgedrückt benötigen wir vom Hexaeder nur jede zweite Ecke.

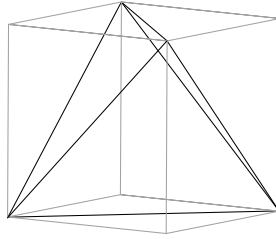


Abbildung 12: Tetraeder im Hexaeder

$$1; 1; -1 \quad -1; 1; 1 \quad 1; -1; 1 \quad -1; -1; -1$$

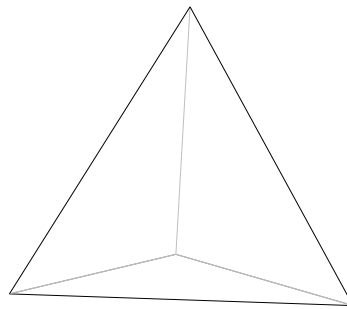


Abbildung 13: Tetraeder

Aufgebaut ist der Tetraeder aus vier 3-Ecken, vier Ecken und sechs Kanten. An jeder Ecke stoßen drei Kanten bzw. Flächen aneinander. Der so konstruierte Tetraeder hat die Kantenlänge $\sqrt{8}$.

Der Tetraeder besitzt je Fläche eine 3-Symmetrie, also vier Stück, die identisch ist mit der Eck-Symmetrie der der Fläche gegenüberliegenden Ecke und drei 2-Symmetrien, je eine pro gegenüberliegendes Kantenpaar.

3.5 Der Oktaeder $\{P_8 = Py_4 + Py_4\}$

Für die Konstruktion des Oktaeders müssen wir beim Hexaeder nur die Flächenmittelpunkte finden und verbinden. Alle Ecken des Oktaeders befinden sich also auf einer der x -, y - oder z -Achsen.

$$\begin{array}{ccc} 1; 0; 0 & 0; 1; 0 & 0; 0; 1 \\ -1; 0; 0 & 0; -1; 0 & 0; 0; -1 \end{array}$$

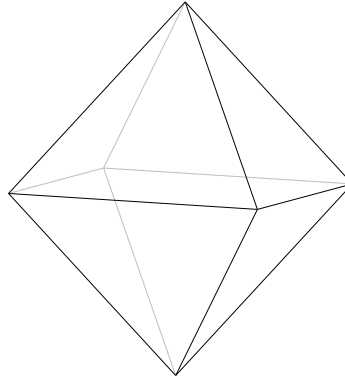


Abbildung 14: Oktaeder

Der Oktaeder besteht aus acht 3-Ecken, zwölf Kanten und sechs Ecken. Die Kantenlänge des so konstruierten Oktaeders ist $\sqrt{2}$. Jeweils vier koplanare Kanten bilden ein regelmäßiges 4-Eck. Daraus ist zu sehen, daß der Oktaeder eigentlich aus zwei Pyramiden mit 4-eckiger Grundfläche (= 4-Pyramide= $\{Py_4\}$) besteht. Aus diesem Grunde ist die Kurzschreibweise des Oktaeders in der Überschrift auch anders als beim Hexaeder oder Tetraeder.

Beim Oktaeder finden sich drei 4-Symmetrien (eine je Eckenpaar), vier 3-Symmetrien (eine je Flächenpaar) und sechs 2-Symmetrien (eine je Kantenpaar).

3.6 Der Ikosaeder $\{P_{20}=Py_5+APr_5+Py_5\}$

Die Koordinaten der Eckpunkte sind auf den Flächen des Würfels zu finden; zwei auf jeder. Diese müssen erst einmal konstruiert werden. Deshalb berechnen wir sie auf einer Hexaeder-Fläche und erhalten die restlichen auf den anderen Flächen durch die Symmetrien des Hexaeders.

Seien A, B, C, D die Ecken einer der Flächen (=Quadrate) des Würfels; Seien E und F die Mittelpunkte von AB bzw. CD . Nun sei G der Mittelpunkt von EF (und der des Quadrates). Dividiere EG im Goldenen Schnitt³ Dann erhalte H so, daß EH die kürzere Strecke ist. Mache das Gleiche mit FG und erhalte J . H und J sind zwei Punkte des Ikosaeders.

³Goldener Schnitt: Dividiere Strecke AB innen durch Punkt C so, daß $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$. Sei $AB = 1$; $AC = e$; $CB = 1 - e$. $\Rightarrow \frac{1}{e} = \frac{e}{1-e} \Rightarrow e^2 + e - 1 = 0 \Rightarrow e = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,6180339885$.

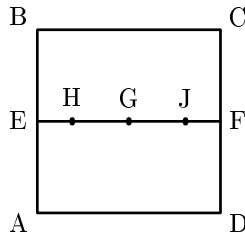


Abbildung 15: Konstruktion zweier Ikosaeder-Punkte auf einer Hexaeder-Fläche

Um die anderen Punkte auf den anderen Flächen zu erhalten, dürfen die Punkte E und F einer Fläche nicht mit den Punkten E' und F' einer angrenzenden Fläche übereinstimmen, sondern die Ebenenkoordinaten der Verbindungsgerade müssen getauscht werden (quasi wie eine 90° Drehung).

$$\begin{array}{cccc}
 0; 1; e & 0; 1; -e & 0; -1; e & 0; -1; -e \\
 1; e; 0 & 1; -e; 0 & -1; e; 0 & -1; -e; 0 \\
 e; 0; 1 & -e; 0; 1 & e; 0; -1 & -e; 0; -1
 \end{array}$$

mit $e = 0,6180339885$

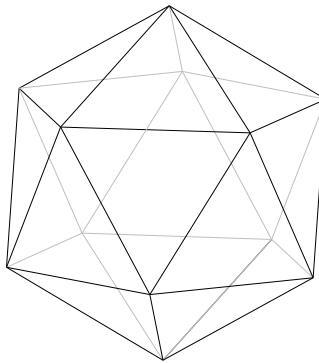


Abbildung 16: Ikosaeder

Zusammengesetzt ist der Ikosaeder aus zwanzig 3-Ecken, dreißig Kanten und zwölf Ecken. Bei dem soeben konstruierten Ikosaeder beträgt die Kantenlänge $2e$. Innerhalb des Ikosaeders lassen sich zwölf 5-Ecke erkennen, die paarweise parallel angeordnet sind. Der Ikosaeder ist also genauso wie der Oktaeder aus anderen kleineren Polyedern zusammengesetzt. Hier erkennen wir (z.B. von oben) eine 5-Pyramide ($=\{Py_5\}$), die auf einem 5-Antiprisma ($=\{APr_4\}$) sitzt, unter dem wiederum eine 5-Pyramide geklebt ist. Und so ist auch die Kurzschreibweise des Ikosaeders.

Der Ikosaeder besitzt zehn 3-Symmetrie auf den Flächen, fünfzehn 2-Symmetrien auf den Kanten und sechs 5-Symmetrien auf den Ecken.

3.7 Der Dodekaeder $\{P_{12}\}$

Der Dodekaeder konstruiert sich aus dem Hexaeder ähnlich wie der Ikosaeder. Neben den acht Ecken des Hexaeders müssen wir noch zwei weitere Ecken pro Hexaeder-Fläche mehr berechnen.

Seien A, B, C, D die Ecken einer der Hexaeder-Flächen. Folge der Konstruktion wie beim Ikosaeder, um H und J zu erhalten. Konstruiere in H und J je eine zur Fläche $ABCD$ senkrechte Gerade. Seien K bzw. L die Punkte auf den Geraden durch H bzw. J , die sich in einer Entfernung HG außerhalb des Hexaeders befinden. K und L sind zwei Eckpunkte des Dodekaeders.

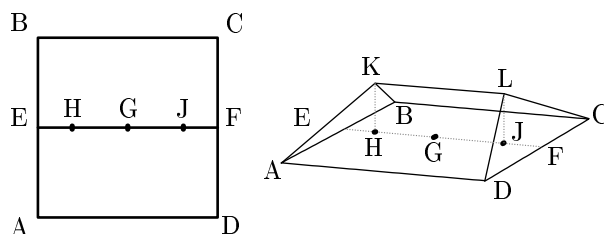


Abbildung 17: Konstruktion zweier Dodekaeder-Punkte über der Hexaeder-Fläche

Zur Bestimmung der Punkte über den anderen Flächen muß die „Orientierung“ genauso beachtet werden wie bei der Bestimmung der anderen Punkte des Ikosaeders. Diese „Orientierung“ kann als die geraden Permutationen der Koordinatenachsen der Punkte auf einer Fläche aufgefaßt werden: dabei wird einmal xyz zu zxy und einmal zu yzx bzw. Negativkoordinaten für die gegenüberliegenden Flächen (siehe die letzten drei Quadrupel der nachfolgenden Punkte).

$$\begin{array}{cccc}
 -1; -1; -1 & -1; -1; 1 & -1; 1; -1 & -1; 1; 1 \\
 1; -1; -1 & 1; -1; 1 & 1; 1; -1 & 1; 1; 1 \\
 0; 1 + e; e & 0; 1 + e; -e & 0; -1 - e; e & 0; -1 - e; -e \\
 1 + e; e; 0 & 1 + e; -e; 0 & -1 - e; e; 0 & -1 - e; -e; 0 \\
 e; 0; 1 + e & -e; 0; 1 + e & e; 0; -1 - e & -e; 0; -1 - e
 \end{array}$$

$$\text{mit } e = 0,6180339885$$

Der Dodekaeder besteht aus zwölf 5-Ecken, dreißig Kanten und zwanzig Ecken. Die Kantenlänge unseres Dodekaeders beträgt $2e$.

An Symmetrien kann der Dodekaeder sechs 5-Symmetrien auf den Flächen, fünfzehn 2-Symmetrien auf den Kanten und zehn 3-Symmetrien auf den Ecken vorweisen.

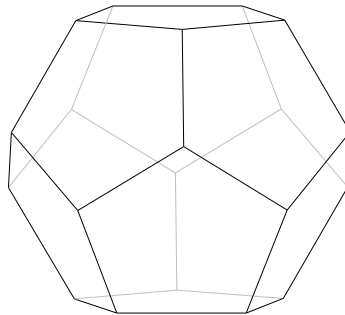


Abbildung 18: Dodekaeder

3.8 Übersicht

Sicher ist einem aufgefallen, daß sich einige Zahlen bei den Anzahlen der Flächen, Kanten und Ecken wiederholen. Dies hat seine Gründe. Einige der Platonischen Polyeder sind dual zueinander. Das heißt, daß wir den dualen Partner erhalten, wenn wir die Flächenmittelpunkte eines Platonischen Polyeders verbinden und umgekehrt. Dadurch wird auch ersichtlich, warum sich auch die Zahlen der Symmetrien wiederholen: Die Flächen-Symmetrien des einen sind die Eck-Symmetrien des anderen.

Hierbei stellt der kleinste Platonische Körper, der Tetraeder, eine Ausnahme dar: Verbinden wir bei ihm die Flächenmittelpunkte, so erhalten wir wieder einen Tetraeder. Der Tetraeder ist also zu sich selbst dual.

Da zwei angrenzende Flächen durch genau eine Kante verbunden sind genauso wie zwei benachbarte Ecken, ändert sich beim Übergang zum Dualen natürlich für die Kantenanzahl und die Kanten-Symmetrien nichts.

	Flächen	Kanten	Ecken	F-Sym.	K-Sym.	E-Sym.
Tetraeder	4	6	4	4 x 3er	3 x 2er	4 x 3er
Hexaeder	6	12	8	3 x 4er	6 x 2er	4 x 3er
Oktaeder	8	12	6	4 x 3er	6 x 2er	3 x 4er
Dodekaeder	12	30	20	6 x 5er	15 x 2er	10 x 3er
Ikosaeder	20	30	12	10 x 3er	15 x 2er	6 x 5er

(Sym. =Symmetrien, F=Fläche, K=Kante, E=Ecke)

Der Hexaeder und der Oktaeder sind dual zueinander, der Dodekaeder dual zum Ikosaeder und der Tetraeder dual zu sich selbst.

Außerdem läßt sich anhand dieser und der weiter unten für die Archimedischen Polyeder folgenden Tabelle auch gut die Eulersche Formel für die Anzahl

der Flächen (F), der Kanten (K) und der Ecken (E) für einen beliebigen Polyeder zeigen.^[27]

$$F - K + E = 2.$$

3.9 Gibt es noch mehr?

Wir haben bis jetzt immer von den fünf Platonischen Polyedern geredet ohne uns darüber Gedanken zu machen, ob es nicht noch mehr Polyeder gibt, die in die Definition fallen. Diese Frage haben sich auch schon andere vor uns gestellt und sind auch teilweise, je nachdem welche Abschrift sie von den Arbeiten Platons vor sich hatten, fündig geworden. Denn in früheren Zeiten war es durchaus üblich, auch implizite Bedingungen zu erfüllen, ohne sie explizit mit in die Definition aufzunehmen.^[1, Kap. 2]

So findet man im Anhang des Buches XIII der Elemente von Euklid im Zusammenhang mit den Platonischen Polyedern eine Proposition, die als Definition aufgefaßt werden kann, da Euklid sich im Text auf die Konstruktion der Polyeder beschränkt ohne Definitionen anzugeben.

Diese Proposition besagt, daß nur die besagten fünf Polyeder aus gleichen regelmäßigen Flächen konstruiert sind. Dies ist nicht richtig, denn neben den fünf Platonischen Polyedern erfüllt auch eine andere Familie von Polyedern, die Deltaeder, diese Bedingungen (siehe Seite 11). Einer dieser Deltaeder ist die 3-Bipyramide, also zwei Tetraeder zusammengeklebt. Sie besteht auch nur aus regelmäßigen 3-Ecken (siehe Abbildung 3 auf Seite 11 links in der Mitte)!

Es ist deshalb wichtig, alle, auch die impliziten Bedingungen, mit in die Definition zu nehmen. Und so haben wir auch oben bei der Definition die Bedingung mit aufgenommen, daß auch alle Eck-Konfigurationen gleich sein sollen, alle Ecken und alle Flächen also äquivalent sind zur Beschreibung der Polyeder.

Proposition 1 *Es existieren nur fünf konvexe, endliche Polyeder im 3-dimensionalen Anschauungsraum, deren Flächen alle gleich und regelmäßig sind und deren Ecken alle die gleichen Eck-Konfigurationen haben. (Diese nennen wir Platonische Polyeder.)*

BEWEIS: Zunächst betrachten wir eine beliebige Ecke eines beliebigen Polyeders. Es ist klar, daß an dieser Ecke mindestens drei Flächen anstoßen müssen. Außerdem muß die Winkelsumme der Flächen an dieser Ecke kleiner als 360° sein. Da die gesuchten Polyeder aus gleichen und regelmäßigen Flächen bestehen sollen, können wir für ein gegebenes n -Eck leicht den Flächenwinkel berechnen.⁴ Wenn der Polyeder aus 3-Ecken besteht, beträgt ein Flächenwinkel

⁴Der Flächenwinkel ω_n ist der Innenwinkel zwischen zwei Kanten eines regelmäßigen n -Ecks und berechnet sich wie folgt: $\omega_n = 180^\circ \cdot \frac{n-2}{n}$.

60° . Wir können also drei, vier und fünf 3-Ecke um unsere Ecke anordnen. Bei sechs 3-Ecken sind wir mit der Winkelsumme bei 360° , die 3-Ecke befänden sich in der Ebene, womit der ganze Polyeder in einer Ebene wäre und damit unendlich groß. Wenn der Polyeder nur aus 4-Ecken besteht, so können wir drei 90° -Winkel um unsere Ecke anordnen, vier schon nicht mehr. Wenn der Polyeder aus 5-Ecken besteht, der Flächenwinkel also 108° beträgt, lassen sich auch nur drei, nicht aber vier Flächen um unsere Ecke anordnen. Bei 6-Ecken, 7-Ecken, usw. ist die Winkelsumme von den mindestens drei Flächen nie kleiner als 360° . Somit existieren nur die Möglichkeiten der Anordnung um eine Ecke von drei, vier und fünf 3-Ecken, drei 4-Ecken und drei 5-Ecken, was dem Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Hexaeder bzw. Dodekaeder entspricht. Um die anderen Ecken brauchen wir uns nicht zu kümmern, denn dort passiert ja genau das gleiche, da alle Eck-Konfigurationen gleich sein sollen. \square

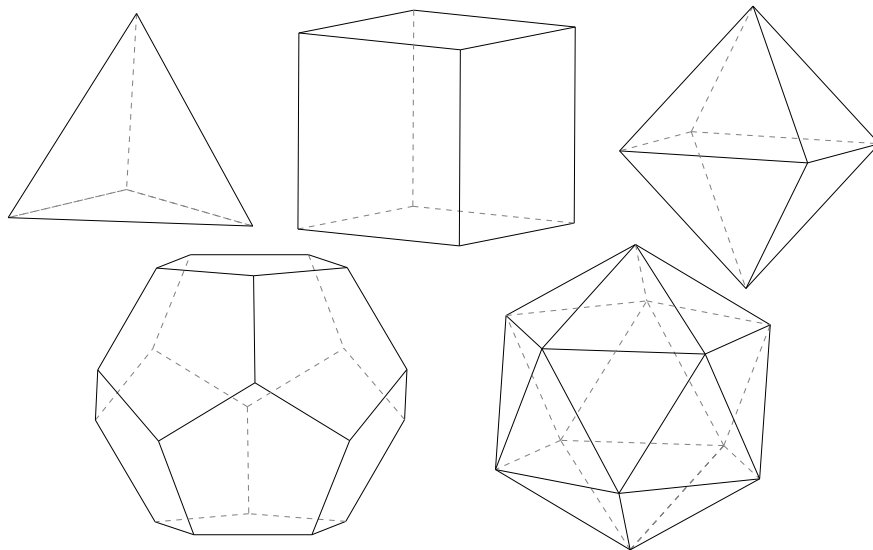


Abbildung 19: Übersicht: Platonische Körper

4 Archimedische Polyeder

„Wer die Geometrie versteht, der versteht alles in der Welt.“

Galileo Galilei

„So fängt denn alle menschliche Erkenntnis mit der Anschauung an,
geht von da zu den Begriffen und endet mit Ideen.“

Immanuel Kant

4.1 Historisches

In dem fünften Buch seiner Mathematischen Sammlung schreibt Pappus um 280 vor Christus die Entdeckung der dreizehn Polyeder Archimedes zu. Er zeigt großes Interesse an den regelmäßig gebildeten Polyedern. „...Diese beinhalten nicht nur die fünf Körper, die vom gottähnlichen Platon gefunden wurden,... sondern auch die Körper, dreizehn an der Zahl, welche entdeckt wurden von Archimedes und welche aus gleichseitigen und gleichwinkligen, aber nicht gleichen Polygonen bestehen.“^[1, Kap. 2]

Leider ist die Originalarbeit von Archimedes nicht mehr erhalten. Und auch die Bücher von Pappus waren lange Zeit nicht für die Mehrheit der Leser zugänglich. Deshalb überrascht es nicht, daß im Laufe der Zeit viele der Polyeder wiederentdeckt wurden. Einer der letzten Wiederentdecker vor ihrer endgültigen Popularisierung war Kepler. Unter den von ihm gegebenen Namen sind die einzelnen Archimedischen Polyeder auch heute bekannt.^[3b]

4.2 Eine Definition der Archimedischen Polyeder

Als Archimedischen Polyeder oder Körper bezeichnen wir diejenigen konvexen Polyeder, die aus verschiedenen aber regelmäßigen n -Ecken bestehen, und deren Ecken alle äquivalent sind.

4.3 Vorüberlegungen

Im Folgenden wollen wir eine einzelne Ecke eines Polyeders betrachten und Bedingungen über die darumliegenden regelmäßigen Flächen finden. Anschließend werden wir die Äquivalenz der Ecken ausnutzen und aus der Umgebung dieser einen Ecke Eigenschaften des ganzen Polyeders ableiten. Dabei interessiert uns hauptsächlich, ob eine Konstruktion des ganzen Polyeders ausgehend von einer Ecke und dessen umliegenden Flächen eindeutig ist.

Definition 1 Zu einer gegebenen Ecke eines Polyeders definieren wir die **Eck-Konfiguration** als den Zyklus der regelmäßigen Flächen, die um die Ecke liegen. Als Schreibweise für eine Eck-Konfiguration fangen wir im Zyklus bei der Fläche kleinsten Typs (mit kleinster Kantenzahl) an und schreiben den gesamten Zyklus in runden Klammern; z.B. $(3,4,5,4)$ ist eine Ecke, die umgeben ist von einem 3-Eck, dann 4-Eck, dann 5-Eck und dann 4-Eck, das wieder an das 3-Eck grenzt.

In diesem Zusammenhang wird auch manchmal von der **Vertex- oder Eck-Figur** gesprochen. Das ist das sphärische Polygon, das entsteht, wenn wir eine Kugel mit der halben Kantenlänge als Radius und der Ecke als Mittelpunkt mit den Polyederflächen schneiden. Diese Eck-Figuren sind z.B. bei den Platonischen Polyedern regelmäßige n -Ecke, im Allgemeinen haben sie aber verschieden große Kanten und Winkel.

Desweiteren müssen wir die Umgebung von Ecken, Kanten und Flächen genau definieren, um diese besser vergleichen zu können.

Definition 2 Die **Elemente** eines Polyeders sind die Ecken, Kanten und Flächen. Als **Umgebung** eines Elementes H eines Polyeders bezeichnen wir die Menge aller an H angrenzenden anderen Elemente, deren Typ (bei den Flächen), deren Länge (bei verschiedenen langen Kanten; hier irrelevant) und deren Anordnung (bei den Flächen um eine Ecke ist die Reihenfolge wichtig). Pro Umgebung muß eine Umlaufrichtung festgelegt werden; bei dem Vergleich zweier Umgebungen ist es aber egal, ob beide Umlaufrichtungen gleich sind oder nicht, da die Spiegelung die Richtungen umdreht und zu den für den Vergleich definierten Bewegungen zählt.

So ist die Umgebung einer Ecke z.B. 3-Eck-4-Eck-4-Eck-5-Eck (oder einfach $(3,4,4,5)$ als Eck-Konfiguration). Die Kanten sind irrelevant, da alle gleich lang sind und zwischen zwei Flächen immer eine Kante liegt. Die Umgebung einer Kante sind die beiden Ecken und deren Umgebungen. Und die Umgebung einer Fläche sind die angrenzenden Ecken und deren Umgebungen.

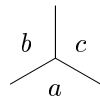
Machen wir uns jetzt einige Gedanken über die Zusammensetzung von regelmäßigen Polygonen um eine Ecke: Wie bei den Platonischen Körpern brauchen wir als erstes mindestens drei Flächen um eine Ecke, zweitens kann um eine Ecke die Winkelsumme der Flächenwinkel nicht größer gleich 360° sein ohne daß die geforderte Konvexität gebrochen wird. Und zuletzt müssen an einer Ecke mindestens zwei verschiedene Typen von Flächen auftreten, damit wir Archimedische Polyeder erhalten.

Aus diesen grundsätzlichen Bedingungen und der Eigenschaft der Archimedischen Polyeder, daß alle Eck-Konfigurationen gleich sein sollen, lassen sich schon einige Einschränkungen auf mögliche Konfigurationen machen.

Lemma 1 *Bei einem konvexen Polyeder, dessen Flächen alle regelmäßig und dessen Ecken alle äquivalent sind, können nicht mehr als drei verschiedene Flächentypen auftreten.*

BEWEIS: Da alle Ecken äquivalent sind, müssen alle Flächentypen mindestens einmal an einer Ecke anstoßen. Die vier kleinsten n -Ecke (3-, 4-, 5- und 6-Eck) haben dann aber schon eine Winkelsumme von $60^\circ + 90^\circ + 108^\circ + 120^\circ = 378^\circ > 360^\circ$. Für größere n ist die Winkelsumme natürlich noch größer. \square

Lemma 2 *Bei einem Polyeder, dessen Eck-Konfigurationen alle gleich sind, kann eine Eck-Konfiguration mit drei Flächen (a, b, c) mit $b \neq c$ und a ungerade nicht auftreten.*



BEWEIS: Da alle Eck-Konfigurationen gleich sind, alternieren b - und c -Ecke um das a -Eck. Da a ungerade ist, gibt es aber keine eindeutige Alternation und eine Konstruktion führt zu einem Widerspruch. Dies gilt für drei verschiedene Flächen, insbesondere aber auch, wenn $a = b$ oder $a = c$. \square

Lemma 3 *Bei einem Polyeder, dessen Eck-Konfigurationen alle gleich sind, kann eine Eck-Konfiguration mit vier Flächen $(3, a, b, c)$ mit $a \neq c$ – abgesehen von der Eck-Konfiguration $(3, 3, 3, c)$, $c \geq 4$ – nicht auftreten.*



BEWEIS: Wenn a , b und c alle verschieden sind, dann folgt auch hier aus der Gleichheit aller Eck-Konfigurationen, daß an jeder Spitze des 3-Ecks ein b -Eck liegt und die a - und c -Ecke um das 3-Eck alternieren müssen, was zu einem Widerspruch führt. Insbesondere ist dies richtig, wenn einer der drei Flächentypen a , b , c auch ein 3-Eck ist. Sind nun zwei der drei a , b , c gleich, oBdA. $a = b$, dann können wir an die beiden freien Spitzen des 3-Ecks je ein a -Eck und an die freie 3-Eckskante ein c -Eck legen und erhalten die Eck-Konfigurationen $(3, a, a, c)$ und $(3, c, a, c)$, was ein Widerspruch ist, da alle Eck-Konfigurationen gleich sein sollen. Setzen wir also an die obere 3-Ecksspitze – gegenüber des c -Ecks – auch ein c -Eck, an die andere freie Spitze und an die freie Kante des 3-Ecks je ein a -Eck, dann erhalten wir die Eck-Konfigurationen $(3, a, a, c)$ und $(3, a, c, a)$, was wieder ein Widerspruch ist, wenn $a \neq 3$. Denn $a = 3$ führt zu den Konfigurationen $(3, 3, 3, c)$ und $(3, 3, c, 3)$, welche gleich sind, und damit zur einzigen Ausnahme. \square

Jetzt können wir uns mit der Eindeutigkeit einer Konstruktion beschäftigen: Gegeben sei eine Eck-Konfiguration und die Bedingung, daß alle Eck-Konfigurationen des Polyeders gleich und alle Flächen regelmäßig sein sollen. Wann ist dann die Konstruktion des ganzen Polyeders eindeutig, das heißt, wann sind zu gegebener Eck-Konfiguration auch schon die Flächen an Nachbar-Ecken und den folgenden festgelegt?

Aus den Vorgehensgedanken und der Tatsache, daß sechs Flächen um eine Ecke nicht möglich sind (sechs 3-Ecke ergeben schon 360° , größere und/oder mehr Flächen sind mit der Konvexitätsbedingung aber nicht vereinbar), können wir eine Fallunterscheidung in drei, vier und fünf Flächen um jede Ecke machen.

1. Eck-Konfiguration mit drei Flächen (a, b, c) :

$$\begin{array}{c} b \\ | \\ c \\ / \quad \backslash \\ a \end{array} \quad \text{mit } a \neq b \vee a \neq c \vee b \neq c.$$

- (a) a ungerade. Wenn $b \neq c$, dann existiert keine Alternation von den Flächen b und c um a (nach Lemma 2). Wir erhalten einen Widerspruch. Wenn $b = c$, dann kann $b = c$ nicht ungerade sein, da dann keine Alternation von a und c um b existieren, wir also einen Widerspruch erhalten. Also ist $b = c$ gerade und es existiert um jedes b bzw. c eine eindeutige Alternation und damit eine eindeutige Konstruktion.
- (b) a gerade. Wenn b oder c ungerade sind, dann existiert wieder keine Alternation um diese Fläche und wir erhalten einen Widerspruch nach Lemma 2. Also sind b und c auch gerade. Dann existiert um a , b und c je eine eindeutige Alternation und die Konstruktion ist eindeutig.

2. Eck-Konfiguration mit vier Flächen (a, b, c, d) :

$$\begin{array}{c} a \quad | \quad b \\ \hline d \quad | \quad c \end{array} \quad \text{mit maximal drei verschiedenen Flächen (nach dem ersten Lemma), oBdA. } a = b \text{ oder } a = c.$$

(a) $a = b$ $\begin{array}{c} a \quad | \quad a \\ \hline d \quad | \quad c \end{array}$ mit $a \neq c \vee a \neq d \vee c \neq d$.

- i. $a = b = c$ gerade. Dann existiert um alle d eine eindeutige Umgebung (alles a -Ecke), aber gegenüber von d an der anderen Ecke der Kante zwischen a und c gibt es zwei Konstruktionsmöglichkeiten: entweder ein d an die Kante von a oder von

- c. Nach der Winkelsummenbegrenzung ist die einzige mögliche Eck-Konfiguration (3,4,4,4) mit $a = b = c = 4$ und $d = 3$. Ein Polyeder mit dieser Konfiguration hat also mehrere Isomere⁵.
- ii. $a = b = c$ ungerade. Dann ist nach der Winkelsummenbegrenzung $a = b = c = 3$ und d ist beliebig und um alle d liegen nur 3-Ecke und um alle 3-Ecke existiert die eindeutige Umgebung 3-Eck-3-Eck- d -Eck.
- iii. $a \neq c \wedge a \neq d$. Wenn $c = d$, dann können a oder c nicht ungerade sein, da dann keine Alternation existiert und dies zum Widerspruch führt. Also müßten a und c gerade sein, doch ist die kleinste Möglichkeit (4,4,6,6) schon durch die Winkelsummenbegrenzung ausgeschlossen. Folglich muß $c \neq d$ gelten; wenn a ungerade ist, existiert wieder keine Alternation darum. Gleiches gilt, wenn c oder d ungerade sind. Also müssen $a = b, c$ und d gerade sein. Doch auch hier ist die Winkelsumme der kleinsten Eck-Konfiguration (4,4,6,8) schon zu groß.

$$(b) \quad a = c \quad \begin{array}{c|c} a & d \\ \hline b & a \end{array} \quad \text{mit } a \neq d \wedge a \neq b.$$

- i. $b = d$. Dann grenzen an allen a nur b und umgekehrt und die Konstruktion ist eindeutig.
- ii. $b \neq d$. Wenn a ungerade ist, existiert keine Alternation um a und wir bekommen einen Widerspruch. Also muß a gerade sein. Dann grenzen an b und d nur a und um die a existiert eine eindeutige Alternation, welche zu einer eindeutigen Konstruktion führt.

3. Eck-Konfiguration mit fünf Flächen (a, b, c, d, e):

$$\begin{array}{c|c} b & c \\ \hline a & d \\ \hline e & \end{array} \quad \text{mit mindesten drei gleichen Flächen (nach Lemma 1).}$$

Wenn die anderen beiden Flächen anders sind als die drei gleichen, dann ist die kleinste Eck-Konfiguration aus drei 3-Ecken und zwei 4-Ecken schon durch die Begrenzung der Winkelsumme ausgeschlossen. Also sind mindestens vier Flächen 3-Ecke und als mögliche Konfigurationen kommen – auch wegen der Winkelsummenbegrenzung – nur (3,3,3,3,4) und (3,3,3,3,5) in Frage.

$$\begin{array}{c|c} 3^* & 3^* \\ \hline 3^\odot & 3^\odot \\ \hline a & \end{array} \quad \text{mit } a \in \{4, 5\} \text{ und den Bezeichnungen } \mathbf{Spitzen-3-Eck} \text{ für die 3-Ecke mit Index } \star \text{ und } \mathbf{Seiten-3-Eck} \text{ für die mit Index } \odot.$$

⁵in Anlehnung an die Chemie, in der Moleküle aus gleichen Bausteinen aber mit verschiedenen Formen so heißen.

Konstruieren wir jetzt den Polyeder mit der Eck-Konfiguration $(3,3,3,3,a)$ Schritt für Schritt: Zuerst umlaufen wir a , setzen an jeder Kante des a -Ecks ein Seiten-3-Eck und – zwischen diesen – an jeder a -Eck-Spitze zwei Spitzen-3-Ecke. Da an jeder Ecke nur höchstens ein a -Eck vorkommt, müssen wir über die 3-Ecke von einem a -Eck zum nächsten gehen. Die Seiten-3-Ecke haben aber keine freien Kanten mehr. Also liegt das nächste a -Eck nur an deren Spitzen (Also ist das Seiten-3-Eck eines a -Ecks das Spitzen-3-Eck des Nachbar- a -Ecks). An besagter Spitze liegen schon drei 3-Ecke. Jetzt bestehen für jede dieser Spitzen zwei Möglichkeiten, das vierte 3-Eck und ein a -Eck zu setzen; entweder das a -Eck links oder rechts von der Spitze. Es ist leicht zu sehen, daß eine einmal getroffene Wahl alle anderen Möglichkeiten eindeutig festlegt, da es andernfalls zu anderen als der $(3,3,3,3,a)$ -Eck-Konfigurationen kommt. Folglich gibt es also für $(3,3,3,3,4)$ und $(3,3,3,3,5)$ je zwei Isomere, die sich weder durch verschiedene Konfigurationen noch durch mehr oder weniger Symmetrien unterscheiden, sondern sich – durch die Wahl links oder rechts – spiegelbildlich zueinander verhalten. Sie sind per Definition (Spiegelung \in Bewegung; \exists Bewegung \Rightarrow Gleichheit) gleich, aber anschaulich anders und haben so meist den Index $[l]$ oder $[r]$ für links bzw. rechts.

In früheren Arbeiten über diese Polyeder wurden den Eck-Konfigurationen längst nicht so viel Gewichtung zugesprochen wie heutzutage. Zu jener Zeit war es wesentlich wichtiger, daß alle Eckpunkte auf einer Sphäre liegen und die Flächen regelmäßig sind, während Eigenschaften wie die Äquivalenz der Ecken und die Menge der Symmetrien meist implizit angenommen wurden. So begnügten sich frühere Mathematiker auch damit, die Anzahl und Typ der Flächen zu erwähnen in dem Glauben, damit die Polyeder eindeutig bestimmt zu haben.

Dem ist aber nicht so, wie ein kurzes Gedankenspiel zeigt: Nehmen wir einmal an, wir hätten das Modell eines Polyeders vor uns, das die Eigenschaft hat, daß eine Menge von Eckpunkten so in einer Ebene liegt, daß der Schnitt dieser Ebene mit dem Polyeder ein regelmäßiges n -Eck bildet. Dabei klammern wir triviale Fälle, bei denen eine ganze Polyederfläche mit in die Ebene fällt oder die Ebene durch nur drei Eckpunkte des Polyeders geht, aus und gehen davon aus, daß die Ebene ein mehr oder weniger kuppelförmiges Gebilde vom Polyeder abtrennt. Wenn wir nun weiter davon ausgehen, daß auch die Kanten des auf dem Schnitt liegenden n -Ecks Kanten des Polyeders sind, dann können wir die Kuppel um $\frac{360^\circ}{n}$ zum Rest des Polyeders in der Ebene verdrehen (siehe Abbildung 20) und würden an der Anzahl und den Typen der Flächen sowie an der Tatsache, daß alle Ecken auf einer Sphäre liegen, nichts ändern. Die Frage ist nun, finden wir solche Ebenen mit n -Ecken. Und wenn ja, lassen sich diese Polyeder schon anhand ihrer Eck-Konfigurationen identifizieren?

Eine kurze Betrachtung der Archimedischen Körper (betrachte die Übersicht auf Seite 38) und eine kurze Berechnung über die Koplanarität zeigen uns,

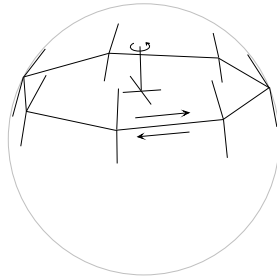


Abbildung 20: Verdrehung einer Kuppel

daß es tatsächlich vier Polyeder unter den Archimedischen gibt, bei denen wir nichttriviale Ebenen finden. Dabei lassen sich die resultierenden n -Ecke auf den Schnittebenen folgendermaßen charakterisieren: Die äquidistanten benachbarten Eckpunkte liegen im Polyeder auf einem geschlossenen Kantenzug, der auf der einen Seite der Ebene abwechselnd durch Kanten von 3-Ecken und x -Ecken gebildet wird.

Es ist leicht zu sehen, daß mindestens vier Flächen an diesen Ecken auf der Ebene zusammen kommen müssen, da bei nur drei Flächen die Ebene notwendigerweise durch eine der drei Flächen laufen muß und dadurch nur ein trivialer Fall beschrieben wird, bei dem kein neuer Polyeder entsteht.

Wir suchen also Konfigurationen $(3,x,a,b)$ oder $(3,x,a,b,c)$. Die letzte Möglichkeit können wir ausschließen, da genauere Betrachtungen der beiden aus den in Frage kommenden Eck-Konfigurationen $(3,3,3,3,4)$ und $(3,3,3,3,5)$ resultierenden Polyeder zeigen, daß es keine nichttrivialen Ebenen mit den gesuchten Bedingungen gibt.

So kommen wir also auf die Konfigurationen $(3,4,3,4)$, $(3,4,4,4)$, $(3,4,5,3)$ und $(3,5,3,5)$. Und tatsächlich finden wir in den aus diesen Konfigurationen resultierenden Polyedern Ebenen, die sich in 6-, 8-, 8- bzw. 10-Ecken mit dem Polyeder schneiden. Eine Verdrehung der Kuppeln – für die ersten drei heißen sie 3-, 4- bzw. 5-Kupola; für die letzte 5-Rotunda – um eine Kante führt also auch zu Polyedern mit regelmäßigen Flächen, deren Ecken alle auf einer Sphäre liegen. Nur sind dann nicht mehr alle Ecken äquivalent, die Symmetrien der Polyeder geringer. Beim Polyeder aus $(3,4,4,4)$ sind zwar alle Eck-Konfigurationen noch gleich, aber bei den anderen grenzen nach der Verdrehung dann manche 3-Ecke mit Kanten aneinander.

Um diese Isomere von den „echten“ Archimedischen Polyedern zu unterscheiden, bekommen die regelmäßigeren meist den Index [reg], während die anderen den Index [irreg] erhalten.

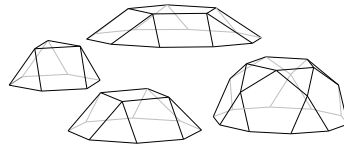


Abbildung 21: 3-, 4-, 5-Kupola und 5-Rotunda

4.4 Wie viele Archimedische Polyeder gibt es?

Wir wollen uns jetzt keine Gedanken mehr machen über verschiedene Isomere oder alternative, abgeschwächte Definitionen. Für uns sind (bis jetzt) Archimedischen Polyeder die konvexen Polyeder, die von verschiedenen, aber regelmäßigen n -Ecken begrenzt sind und deren Ecken alle äquivalent sind.

Aber haben wir bei unserer Definition nicht noch eine weitere Bedingung vergessen? Wir wollen, daß diese Polyeder schön, rund, harmonisch sind. Doch wie können wir diese „Eigenschaften“ genauer fixieren und mathematisch formulieren?

Nun, an eine Eigenschaft denken wir eigentlich immer, ohne es zu merken: Wir möchten, daß die Archimedischen Polyeder eine Art von Erweiterung oder Verallgemeinerung der Platonischen Polyeder sind. Und diese sollen nicht nur auf einer Sphäre liegen und dessen Oberfläche gleichmäßig teilen, sie sollen auch irgendwie selber „kugelförmig“ sein.

Was das deutet, machen wir uns am besten klar, indem wir etwas suchen, was nicht kugelförmig ist, sondern flach. Welche regelmäßigen Polyeder sind flach? Prismen und Antiprismen. Beide bestehen sie aus zwei n -Ecken (mit n beliebig groß!) und einem Ring aus kleinen m -Ecken, bei ersteren 4-Ecke, bei letzteren 3-Ecke. Und auch diese Polyeder bestehen aus verschiedenen aber regelmäßigen n -Ecken, sind konvex und alle ihre Ecken sind äquivalent. Alle ihre Ecken liegen sogar auf einer Sphäre. Nur wird dessen Oberfläche nicht in gleich große Bereiche geteilt, und je mehr Ecken die Boden- und Deckenflächen haben, desto größer wird der Unterschied zwischen den kleinen und den großen Bereichen. Bei den meisten Archimedischen Polyedern hält sich dieser Unterschied dagegen eher in Grenzen.

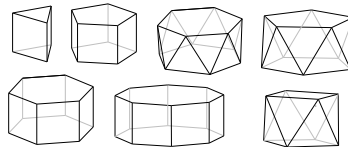


Abbildung 22: einige Prismen und Antiprismen

Um nun die Familien der Prismen und Antiprismen – die je unendlich viele Mitglieder haben – von den Archimedischen Polyedern zu trennen wurden in der Vergangenheit viele Zusatzbedingungen eingeführt, die immer nur diese Unterscheidung zum Ziel hatten, manchmal aber sehr stark waren und irgendwie im Nachhinein hinzugefügt wirkten. Kepler hat in einer seiner frühen Arbeiten für die Anzahl der verschiedenen Flächen eines Archimedischen Polyeders nur Nummern zugelassen, die auch als Flächenanzahlen bei den Platonischen vorkommen, also vier, sechs, acht, zwölf und zwanzig. Bei diesem Versuch, Prismen und Antiprismen auszuklammern, schloß er aber auch die beiden Schrägen Polyeder aus der Familie aus, da beide mehr als dreißig 3-Ecke haben.

Später hat er in seinen Arbeiten am Anfang immer erst die Prismen und Antiprismen ausgeklammert und dann Aussagen über die Archimedischen Polyeder gemacht. Einfach zuzusagen, die Anzahl der verschiedenen Flächen solle mindestens drei sein, widersträubte ihm.^[3b]

Wir werden hier die ganze Diskussion verkürzen und, wie Kepler die Prismen und Antiprismen von vornherein ausschliessen.

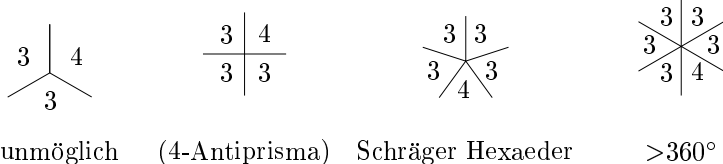
Proposition 2 *Es existieren neben den Prismen (Eck-Konfiguration $(4,4,n)$ und Antiprismen (Eck-Konfiguration $(3,3,3,n)$) nur dreizehn weitere konvexe, endliche Polyeder im 3-dimensionalen Anschauungsraum, deren Flächen verschieden, aber regelmäßig sind und deren Ecken alle äquivalent sind. (Diese nennen wir Archimedische Polyeder.)*

Wir werden wie bei den Platonischen Polyedern auch hier einen konstruktiven Beweis mittels Ausschluß aller unmöglichen Konfigurationen anhand einer Ecke machen, da ja alle Ecken äquivalent sein sollen. Dabei sollen uns die Gedanken und Lemmata des vorigen Unterabschnitts helfen.

BEWEIS DER PROPOSITION 2: Aus dem Lemma 1 wissen wir, daß höchstens drei verschiedene Flächentypen vorkommen können, aus der Definition aber mindestens zwei Typen. Betrachten wir also zunächst die Eck-Konfigurationen mit zwei verschiedenen Flächentypen.

1. Der Polyeder besteht nur aus 3-Ecken und 4-Ecken.

Gehen wir erst einmal davon aus, wir hätten nur ein 4-Eck an jeder Ecke. Dann können wir nur zwei, drei und vier 3-Ecke dazu nehmen, da fünf 3-Ecke die Winkelsummengrenze von 360° sprengen. Zwei 3-Ecke ist nach Lemma 2 nicht möglich, drei 3-Ecke und ein 4-Eck bilden ein 4-Antiprisma, welches auch ausgeschlossen ist. Nur fünf 3-Ecke und ein 4-Eck bilden einen der gesuchten Polyeder, den Schrägen Hexaeder.



Als nächstes gehen wir von zwei 4-Ecken an jeder Ecke aus. Mit einem weiteren 3-Eck erhalten wir das 3-Prisma, welches ausgeschlossen ist. Bei zwei 3-Ecken haben wir zwei Möglichkeiten: Die 3-Ecke nebeneinander an jeder Ecke oder abwechselnd mit den 4-Ecken. Der erste Fall ist wegen Lemma 3 nicht möglich, der zweite Fall liefert den Kubo-Oktaeder. Bei drei 3-Ecken und zwei 4-Ecken ist die Winkelsumme schon nicht mehr kleiner als 360° .

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{c} 4 \\ | \\ 4 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} 3 \quad 4 \\ | \quad | \\ 3 \quad 4 \end{array} & \begin{array}{c} 3 \quad 4 \\ | \quad | \\ 4 \quad 3 \end{array} & \begin{array}{c} 3 \quad 3 \\ | \quad | \\ 3 \quad 4 \end{array} \\
 (3\text{-Prisma}) & \text{unmöglich} & \text{Kubo-Oktaeder} & = 360^\circ
 \end{array}$$

Für den Fall, daß wir drei 4-Ecke pro Ecke haben, können wir nur noch ein 3-Eck dazu tun, was uns zum Romben-Kubo-Oktaeder führt. Zwei 3-Ecke und drei 4-Ecke geben eine Winkelsumme größer als 360° . Und bei vier 4-Ecke sind wir schon ohne 3-Ecken bei einer Winkelsumme von 360° .

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} 3 \quad 4 \\ | \quad | \\ 4 \quad 4 \end{array} & \begin{array}{c} 4 \quad 4 \\ | \quad | \\ 4 \quad 4 \end{array} & \begin{array}{c} 3 \quad 4 \\ | \quad | \\ 3 \quad 4 \end{array} \\
 \text{Romben-Kubo-Oktaeder} & = 360^\circ & > 360^\circ
 \end{array}$$

2. Der Polyeder besteht nur aus 3-Ecken und 5-Ecken.

Bei einem 5-Eck haben wir wieder die Möglichkeit, zwei, drei oder vier 3-Ecke hinzu zu nehmen. Zwei 3-Ecke sind nicht möglich nach Lemma 2, drei 3-Ecke führt zu einem ausgeschlossenem 5-Antiprisma und vier 3-Ecke zum Schrägen Dodekaeder. Mehr als vier 3-Ecke und ein 5-Eck bilden eine Winkelsumme größer als 360° .

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{c} 3 \quad 5 \\ | \quad | \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} 3 \quad 5 \\ | \quad | \\ 3 \quad 3 \end{array} & \begin{array}{c} 3 \quad 3 \\ | \quad | \\ 3 \quad 5 \end{array} & \begin{array}{c} 3 \quad 3 \\ | \quad | \\ 3 \quad 3 \\ | \quad | \\ 3 \quad 5 \end{array} \\
 \text{unmöglich} & (5\text{-Antiprisma}) & \text{Schräger Dodekaeder} & > 360^\circ
 \end{array}$$

Nehmen wir zwei 5-Ecken, so ist ein einzelnes 3-Eck zusätzlich durch Lemma 2 ausgeschlossen. Zwei zusätzliche 3-Ecke können nebeneinander oder abwechselnd mit den zwei 5-Ecken auftreten; der erste Fall wird durch Lemma 3 ausgeschlossen, der zweite Fall führt zum Ikosi-Dodekaeder. Drei 3-Ecke übersteigen mit den zwei 5-Ecken genauso die 360° , wie drei oder mehr 5-Ecke und ein 3-Eck.

unmöglich	unmöglich	Ikosi-Dodekaeder	>360°

3. Der Polyeder besteht nur aus 3-Ecken und 6-Ecken.

Bei einem 6-Eck haben wir nur die Möglichkeit, zwei oder drei 3-Ecke hinzu zunehmen, da vier zusätzliche 3-Ecke die Winkelsumme auf 360° erhöhen. Zwei 3-Ecke sind nicht möglich nach dem zweiten Lemma und drei 3-Ecke führen zum ausgeschlossenen 6-Antiprisma.

unmöglich	(6-Antiprisma)	= 360°

Gehen wir von zwei 6-Ecken aus, dann können wir nur ein einzelnes 3-Eck zusätzlich dazu nehmen, was zum Stumpfen Tetraeder führt. Bei mehr 3-Ecken bleiben wir nicht mehr unter 360° genauso wie bei drei oder mehr 6-Ecken.

Stumpfer Tetraeder	= 360°	= 360°




4. Der Polyeder besteht nur aus 3-Ecken und n -Ecken mit n größer als 6.

Ein einzelnes n -Eck und zwei 3-Ecke ist wegen Lemma 2 nicht möglich. Drei 3-Ecke führen zu einem ausgeschlossenen n -Antiprisma. Bei mehr 3-Ecken überschreitet die Winkelsumme 360°.

unmöglich	(n -Antiprisma)	>360° für $n > 6$



Und starten wir mit zwei n -Ecken, so bleibt wegen der maximalen Winkelsumme nur die Möglichkeit, ein 3-Eck dazu zunehmen. Der Fall, daß dieses n ungerade ist, fällt nach Lemma 2 von vorn herein weg. Und das

n muß außerdem kleiner als 12 sein, da ab dem 12-Eck die Winkelsumme zweier dieser (je 150°) und eines 3-Ecks (60°) schon nicht mehr kleiner als 360° ist. Übrig bleiben nur die beiden Möglichkeiten mit zwei 8-Ecken und einem 3-Eck – der Stumpfe Hexaeder – und mit zwei 10-Ecken und einem 3-Eck – der Stumpfe Dodekaeder.

			$\frac{3}{3} \left \begin{array}{l} n \\ n \end{array} \right.$
Stumpfer Hexaeder	Stumpfer Dodekaeder	$= 360^\circ$	$>360^\circ$ für $n > 6$

Damit haben wir alle Möglichkeiten betrachtet, 3-Ecke mit einem weiteren Flächentyp zu kombinieren. Im Folgenden betrachten wir die restlichen Möglichkeiten, zwei Typen von Flächen zu kombinieren.

5. Der Polyeder besteht nur aus n -Ecken, mit n größer als 4, und 4-Ecken. Gehen wir von einem n -Eck aus, so können wir nur zwei 4-Ecke dazu nehmen, da die Winkelsumme von drei 4-Ecken und einem n -Eck, mit $n > 4$, größer ist als 360° . Eine Konfiguration von zwei 4-Ecken und einem n -Eck ergibt aber ein n -Prisma und ist deshalb ausgeschlossen. Und fangen wir mit zwei n -Ecken an, so kann an der Ecke nur ein 4-Eck sein wegen der Winkelsummenbeschränkung. Allerdings kann n nicht 8 und größer sein, auch wegen der Winkelsumme. Und wenn n ungerade ist, wird die Konfiguration durch das zweite Lemma ausgeschlossen. Bleibt also für n nur 6: Zwei 6-Ecke und ein 4-Eck liefern den Stumpfen Oktaeder. Mehr als zwei n -Ecken und ein 4-Eck führen ebenfalls zu einer zu großen Winkelsumme.

		$\frac{4}{4} \left \begin{array}{l} n \\ n \end{array} \right.$
Stumpfer Oktaeder	$>360^\circ$	$>360^\circ$ für $n > 4$

6. Der Polyeder besteht nur aus n -Ecken, mit n größer als 4, und 5-Ecken. Ein n -Eck und zwei 5-Ecke sind nach Lemma 2 ausgeschlossen und ein n -Eck mit drei 5-Ecken liefert eine zu große Winkelsumme. Also brauchen wir mindestens zwei n -Ecke und können wegen der Winkelsumme so nur ein 5-Eck dazu nehmen. Für $n = 6$ bekommen wir den Stumpfen Ikosaeder und für größere n ist die Winkelsumme größer als 360° . Und mehr als zwei n -Ecke ist auch wegen der Winkelsumme ausgeschlossen.



Stumpfer Ikosaeder



$>360^\circ$



$>360^\circ$ für $n > 4$

Die kleinste der weiteren Eck-Konfigurationen aus nur zwei Flächentypen, die wir noch nicht betrachtet haben, sind zwei 6-Ecke und ein 7-Eck. Diese liefert aber schon mehr als 360° . Folglich sind alle weiteren Eck-Konfigurationen auch ausgeschlossen. Also sind wir mit den Eck-Konfigurationen, die aus zwei verschiedenen Flächen bestehen, fertig und betrachten jetzt noch die Kombinationen mit drei verschiedenen Flächen.

7. Der Polyeder besteht aus 3-, 4- und n -Ecken mit n größer als 4.

Zuerst gehen wir von einem n -Eck und einem 4-Eck aus. Dann passen höchstens noch zwei 3-Ecke dazu. Doch ist der Fall mit zwei 3-Ecken nach Lemma 3 ausgeschlossen und der Fall mit einem einzigen 3-Eck ebenfalls nach Lemma 2.



unmöglich



unmöglich



unmöglich



$>360^\circ$ für $n > 4$

Wenn wir von zwei 4-Ecken und einem n -Eck ausgehen, so kann nur noch ein 3-Eck dazu genommen werden, weil sonst die Winkelsumme zu groß wird. Außerdem ist die Winkelsumme schon zu groß bei $n = 6$. Bleibt also nur ein 5-Eck, zwei 4-Ecke und ein 3-Eck. Diese 4-Ecke können nun nebeneinander oder gegenüber auftreten; der erste Fall ist nach dem dritten Lemma ausgeschlossen, der zweite Fall führt zum Romben-Ikosi-Dodekaeder.



Romben-Ikosi-Dodekaeder



unmöglich



$= 360^\circ$

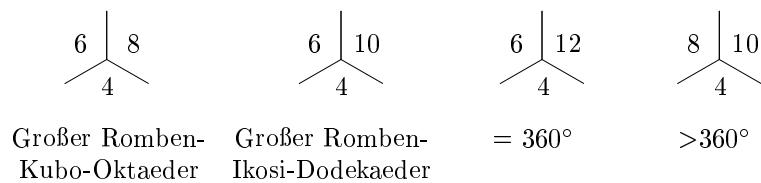


$= 360^\circ$

8. Der Polyeder besteht aus drei verschiedenen Flächentypen, wobei keins von diesen vom Typ 3-Eck ist.

Stellen wir uns vor, der Polyeder hätte an jeder Ecke vier Flächen. Die kleinste Möglichkeit ist zwei 4-Ecke, ein 5- und ein 6-Eck. Doch schon bei dieser ist die Winkelsumme größer als 360° . Also können die restlichen

Polyeder an jeder Ecke nur drei verschiedene Flächen haben. Nach Lemma 2 kann keine dieser drei Flächen eine ungerade Anzahl von Kanten haben. Es bleiben also nur Dreierkombinationen von 4-, 6-, 8-, 10-, 12-Ecken usw. Tritt kein 4-Eck auf, so ist die kleinste Konfiguration ein 6-Eck, ein 8-Eck und ein 10-Eck. Doch diese hat schon eine zu große Winkelsumme. Also muß ein 4-Eck dabei sein. Betrachten wir die kleinsten verbleibenden Konfigurationen 4-Eck-6-Eck-8-Eck, 4-Eck-6-Eck-10-Eck, 4-Eck-6-Eck-12-Eck und 4-Eck-8-Eck-10-Eck. Die letzteren beiden liefern auch größere Winkelsummen als 360° . Übrig bleiben die ersten beiden Eck-Konfigurationen, welche im Großen Romben-Kubo-Oktaeder bzw. Großen Romben-Ikosi-Dodekaeder zu finden sind.



Wir haben jetzt alle Möglichkeiten, regelmäßige n -Ecke so zu konvexen Polyedern zusammen zu fügen, daß alle Eck-Konfigurationen gleich sind, ausgeschöpft. Alle nicht ausgeschlossenen Konfigurationen führen zu den dreizehn Archimedischen Polyedern, wenn wir bei der tatsächlichen Konstruktion die letzte Bedingung, daß nämlich keine Ecke gegenüber den anderen ausgezeichnet, also alle Ecken äquivalent sein sollen, erfüllen. Über die eindeutige Konstruktion haben wir uns ja schon ab Seite 28 Gedanken gemacht und müssen jetzt nur die Polyeder mit weniger Symmetrie ausschließen (z.B. Millers Körper, den irregulären, verdrehten Romben-Kubo-Oktaeder, siehe Seite 52).

Es fehlt jetzt nur noch zu zeigen, daß die Eckpunkte der einzelnen Polyeder auch wirklich auf einer Sphäre liegen. Dies wird bei jedem einzelnen nach der Konstruktion anhand der Eck-Koordinaten nachgewiesen. \square

4.5 Konstruktion unter Ausnutzung der Symmetrien

Eine Art die Archimedischen Polyeder zu berechnen ist sicher die naheliegendste; genauso wie wir sie aus Pappe bauen würden, könnten wir mit z.B. einem 8-Eck anfangen und dessen Eckpunkte berechnen. Danach würden wir für die angrenzenden Flächen Gleichungssysteme aufstellen, die vom Winkel zwischen den Flächen abhängen. Bei aneinanderliegenden Flächen müssen beide Systeme zusammen also die Koordinaten der gemeinsamen Eckpunkte ergeben. Auf diesen Koordinaten aufbauend entwickeln wir dann den Polyeder weiter in der Hoffnung, daß er sich zum Schluß auch schließt. Daß er dies dann auch tut, ist

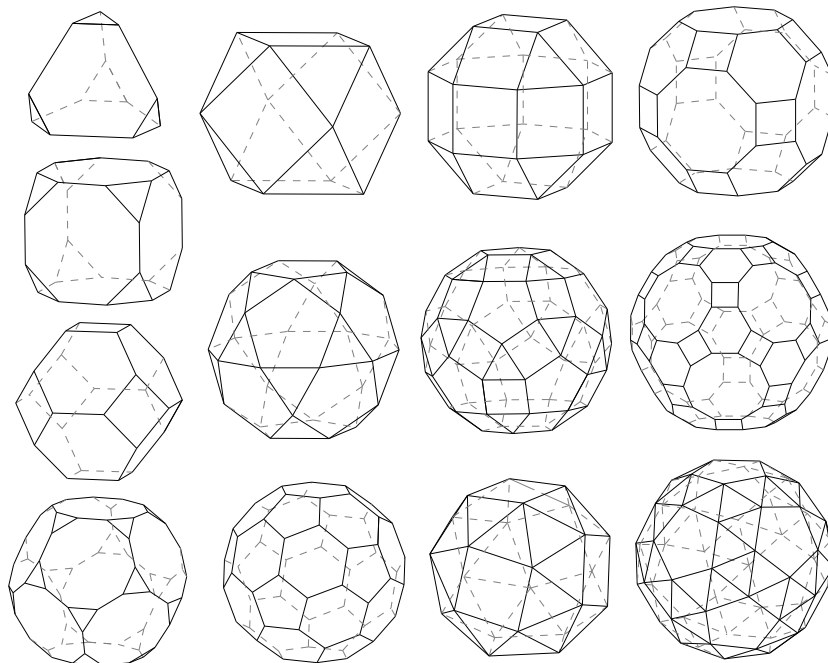


Abbildung 23: Übersicht: Archimedische Polyeder

zumindest bei den größeren der Archimedischen Polyeder eher unwahrscheinlich, was eine kurze Fehlerabschätzung dieser Berechnungen schnell zeigt (Siehe Anhang B, Seite 93).

Da die Archimedischen Polyeder sich ausnahmslos durch verschiedene Arten des „Abschneidens“ (englisch *trunc*, deshalb das T in der Kurzschreibweise) von Ecken und/oder Kanten aus den Platonischen ergeben, diese aber alle auf den Hexaeder zurück zuführen sind, ist es einfacher und genauer, auch diese dreizehn Polyeder im Hexaeder zu suchen. Dabei können wir uns zu Nutze machen, daß alle Archimedischen und Platonischen Polyeder gewisse Symmetrien haben, von denen einige mit denen des Hexaeders übereinstimmen. Wir sollten deshalb bei den Berechnungen unser Augenmerk immer zuerst auf diese Symmetrien richten. Denn bei geschickter Ausnutzung können wir die Anzahl der wirklich zurechnenden Punkte möglicherweise auf ein vierundsechzigstel der Gesamtzahl der Eckpunkte reduzieren (ein symmetrisch angeordnetes 8-Eck auf einer Hexaeder-Fläche) und müssen außerdem nicht auf schon berechnete und damit wahrscheinlich fehlerbehafteter Eckpunkte aufbauen.

Nach erfolgter Berechnung einiger weniger Eckpunkte müssen wir uns dann nur noch Gedanken machen über die Permutationen der drei Koordinaten dieser Punkte. Denn bei berechneten $(x;y;z)$ und z.B. einer bestehenden 4-Symmetrie der xy -Fläche folgen als weitere Punkte $(y;-x;z)$, $(-x;-y;z)$ und $(-y;x;z)$. Au-

ßerdem können wir davon ausgehen, daß auch eine 4-Symmetrie in der xz - und in der yz -Fläche existiert, die Koordinaten also auch in der dritten Koordinate durchpermutiert werden.

Noch einfacher wird es, wenn der Punkt auf der Diagonale der Fläche eines Hexaeders liegt. Für alle anderen möglichen Symmetrien lassen sich ähnliche Folgerungen aufstellen, die wir dann bei den einzelnen Polyedern ansprechen werden.

Anhand dieser Symmetrien läßt sich auch schnell die Eigenschaft aller Archimedischen Körper nachweisen, daß alle Eckpunkte auf ein und derselben Sphäre liegen. Bei berechneten x , y und z ist durch die Länge des Vektors $(x;y;z)$ schon der Radius der Sphäre gegeben, da Permutation bzw. Vorzeichenwechsel einzelner Vektorkomponenten (durch das Quadrieren) an der Vektorlänge nichts ändert. Wir werden bei entsprechender Stelle noch genauer auf diese Eigenschaft eingehen.

Bei der aufgeschriebenen Reihenfolge der Archimedischen Polyeder folge ich der der Platonischen Polyeder. Als erstes stelle ich die fünf Polyeder vor, die durch einfaches kurzes Abschneiden der Ecken aus den Platonischen Polyedern entstehen, und nenne sie wie Kepler Stumpfe Polyeder. Dann stelle ich die beiden Polyeder vor, bei denen soviel abgeschnitten wird, daß sie auf halben Weg zwischen den beiden Dualpaaren der Platonischen Polyeder stehen. Darauf folgen deren abgestumpfte Versionen in kleiner und großer Ausführung und schließlich die beiden ungewöhnlichsten der Archimedischen Polyeder; den Schrägen Hexaeder und den Schrägen Dodekaeder. Von beiden existieren eine linke und rechte Version, wie es schon auf Seite 30 erwähnt wurde.

4.6 Der Stumpfe Tetraeder $\{TP_4\}$

Den Stumpfen Tetraeder erhalten wir, wenn wir jede Kante des Tetraeders in drei gleiche Teile teilen. Wenn wir uns weiterhin daran erinnern, daß die Kanten des Tetraeders die Diagonalen des Hexaeders sind und dieser gewisse Symmetrien hat, langt es, wenn wir eine Koordinate eines der beiden Teilungspunkte einer Diagonale des Hexaeders berechnen. Die zweite Koordinate wird den gleichen Wert haben (eventuell anderes Vorzeichen!), die dritte Koordinate ist 1. Durch geschickte Permutation dieser drei Koordinaten erhalten wir alle Punkt-Koordinaten des Stumpfen Tetraeders.

$$\begin{array}{lll} -1; -g; -g & -1; g; g & g; -1; g \\ -g; -1; -g & g; g; -1 & -g; -g; -1 \\ g; -g; 1 & -g; g; 1 & g; 1; -g \\ -g; 1; g & 1; g; -g & 1; -g; g \end{array}$$

$$\text{mit } g = \frac{1}{3}$$

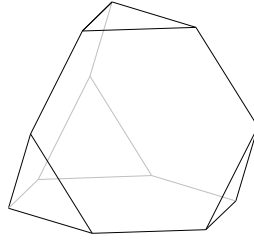


Abbildung 24: Stumpfer Tetraeder

Es ist leicht zu sehen, daß alle Eckpunkte den gleichen Abstand zum Ursprung $\sqrt{1+2g^2} = \frac{1}{3}\sqrt{11}$ haben und somit auf einer Sphäre liegen.

Der Stumpfe Tetraeder besteht aus vier 6-Ecken und vier 3-Ecken, hat achtzehn Kanten und zwölf Ecken. Die Kantenlänge des so konstruierten Stumpfen Tetraeders beträgt $\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

Vier 3-Symmetrien auf den Flächen und drei 2-Symmetrien auf den Kanten zwischen den 6-Ecken lassen sich beim Stumpfen Tetraeder finden. Die Eck-Symmetrien sind vollständig verschwunden.

4.7 Der Stumpfe Hexaeder $\{\text{TP}_6\}$

Der Stumpfe Hexaeder entsteht durch Abschneiden der Ecken eines Hexaeders in einer Art und Weise, daß der Teil der Originalkante, der in der Mitte dieser nach dem Schneiden übrig bleibt, genauso lang ist wie die Kante des 3-Ecks, was durch das Schneiden entstanden ist. Eine Möglichkeit, dieses Mittelstück zu berechnen, ist die Einschreibung eines 8-Ecks in das 4-Eck des Hexaeders, sodaß aus dem halben Winkel zwischen den Linien zweier benachbarter 8-Eckpunkte zu deren Mittelpunkt und den Inkreisradius des 8-Ecks (gleich des vom 4-Eck, also 1) mit Hilfe des Tangens die Kantenlänge $2 \cdot \tan 22,5^\circ = 0,8284271247$ folgt. Für unsere Koordinatenberechnungen brauchen wir natürlich nur die Hälfte der Kante, also $\tan 22,5^\circ$, als Koordinate. Diese muß nur noch mittig auf jeder Kante einmal positiv, einmal negativ aufgetragen werden und schon haben wir alle Eckpunktkoordinaten.

$$\begin{array}{cccccc}
 -1; -1; -g & -1; -1; g & -1; -g; -1 & -1; g; -1 & -g; -1; -1 & g; -1; -1 \\
 -1; -g; 1 & -1; g; 1 & -g; -1; 1 & g; -1; 1 & -1; 1; -g & -1; 1; g \\
 -g; 1; 1 & g; 1; 1 & 1; -1; -g & 1; -1; g & 1; -g; -1 & 1; g; -1 \\
 1; -g; 1 & 1; g; 1 & 1; 1; -g & 1; 1; g & -g; 1; -1 & g; 1; -1
 \end{array}$$

$$\text{mit } g = \tan 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1 = 0,4142135624$$

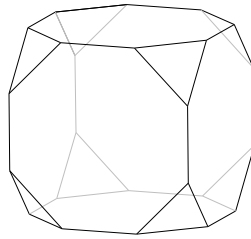


Abbildung 25: Stumpfer Hexaeder

Auch hier sieht man gleich, daß alle Eckpunkte auf einer Sphäre liegen mit Radius $\sqrt{2+g^2}$.

Unser Stumpfer Hexaeder besteht also aus sechs 8-Ecken und acht 3-Ecken, hat sechsunddreißig Kanten und vierundzwanzig Ecken. Die Kantenlänge dieses Stumpfen Hexaeders beträgt $2g$.

An Symmetrien können wir sechs 4-Symmetrien auf den 8-Ecken, vier 3-Symmetrien auf den 3-Ecken und sechs 2-Symmetrien auf den Kanten zwischen zwei 8-Ecken finden. Auch hier gibt es keine Eck-Symmetrien mehr.

4.8 Der Stumpfe Oktaeder $\{TP_8\}$

Um die Koordinaten des Stumpfen Oktaeders zu erhalten, müssen wir die Kanten des Oktaeders in drei Teile teilen. Ausgehend vom Hexaeder berechnen wir, daß die Kantenlänge des Oktaeders $\sqrt{2}$ beträgt. Also beträgt die Kantenlänge des Stumpfen Oktaeders ein Drittel davon. Da die gesuchten Koordinaten aber in zwei Achsen-Richtungen angegeben werden müssen, können wir diese Achsenabschnitte (welche die Länge 1 haben) direkt dritteln. Demnach bekommen wir für die Kante des Oktaeders zwischen $(1;0;0)$ und $(0;1;0)$ die zwei neuen Punkte $(\frac{1}{3};\frac{2}{3};0)$ und $(\frac{2}{3};\frac{1}{3};0)$. Durch Ausnutzung der Eck-Symmetrien des Oktaeders (gleich den Flächen-Symmetrien des Hexaeders) bekommen wir mit diesen Punkten die restlichen Eck-Koordinaten.

$$\begin{array}{cccc}
 g; h; 0 & h; g; 0 & g; -h; 0 & -g; h; 0 \\
 g; 0; h & h; 0; g & g; 0; -h & h; 0; -g \\
 -g; h; 0 & -h; g; 0 & -g; -h; 0 & -h; -g; 0 \\
 -g; 0; h & -h; 0; g & -g; 0; -h & -h; 0; -g \\
 0; g; h & 0; h; g & 0; g; -h & 0; h; -g \\
 0; -g; h & 0; -h; g & 0; -g; -h & 0; -h; -g
 \end{array}$$

$$\text{mit } g = \frac{1}{3} \quad h = \frac{2}{3}$$

Auch hier ist klar, daß alle Ecken auf einer Sphäre liegen mit Radius $\frac{1}{3}\sqrt{5}$.

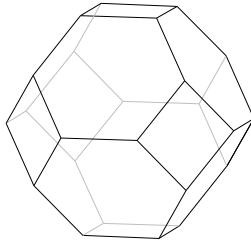


Abbildung 26: Stumpfer Oktaeder

Acht 6-Ecke, sechs 4-Ecke, sechsunddreißig Kanten und vierundzwanzig Ecken bilden den Stumpfen Oktaeder. Die Kantenlänge des so konstruierten Stumpfen Oktaeders ist $\frac{1}{3}\sqrt{2}$.

Der Stumpfe Oktaeder hat vier 3-Symmetrien auf den 6-Ecken, drei 4-Symmetrien auf den 4-Ecken und sechs 2-Symmetrien auf den Kanten zwischen zwei 6-Ecken.

Manchmal wird der Stumpfe Oktaeder auch Kelvins Körper nach William Thomson (Lord Kelvin) genannt, da dieser den Polyeder ausgiebig auf seine raumausfüllenden Eigenschaften – zusammen mit dem Hexaeder – untersucht hat.

4.9 Der Stumpfe Dodekaeder $\{TP_{12}\}$

Die Koordinaten der Eckpunkte des Stumpfen Dodekaeders lassen sich aus den Eckpunkten eines Dodekaeders berechnen, indem jede Kante in drei Teile geteilt wird, wobei der mittlere Teil größer als die Seitenteile sind. Sei k die Kantenlänge des Stumpfen Dodekaeders (also der mittlere Teil) und p die Kantenlänge des Dodekaeders.

Da die 10-Ecke des Stumpfen Dodekaeders aus den 5-Ecken des Dodekaeders durch Abschneiden der Ecken entstehen und der Flächenwinkel des 10-Ecks 144° ist, folgt daraus, daß der Flächenwinkel des gleichschenkligen 3-Ecks (welches vom 5-Eck abgeschnitten werden muß) 36° beträgt.

Wir wissen vom Dodekaeder weiterhin, daß die Seiten der 5-Eck-Flächen $p = 2 \cdot e = \sqrt{5} - 1$ lang sind. Wir suchen nun die Kantenlänge k eines regelmäßigen 10-Ecks, das entsteht durch Abschneiden gleichschenkliger 3-Ecke vom 5-Eck.

Zur Berechnung von k aus p betrachten wir die halben Kantenlängen $\frac{p}{2} = e$ und $\frac{k}{2} = k'$. Sei l die Länge der Schenkel des gleichschenkligen 3-Ecks, das vom 5-Eck abgeschnitten werden muß.

Aus $\cos 36^\circ = \frac{k'}{l}$ folgt $l = \frac{k'}{\cos 36^\circ}$. Außerdem besteht die offensichtliche Be-

ziehung

$$e = k' + l \Rightarrow l = e - k' \Rightarrow \frac{k'}{\cos 36} = e - k' \Rightarrow k' \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos 36}\right) = e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k' = \frac{e}{1 + \frac{1}{\cos 36}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2 + \frac{2}{\cos 36}} = 0,2763932023.$$

Also ist die Kantenlänge k des, aus dem auf Seite 21 dargestellten Dodekaeder, konstruierten stumpfen Dodekaeder $k = 2k' = 0,5527864046$. Angefangen mit den Dodekaeder-Kanten, die über den Flächen des Hexaeders liegen, erhalten wir mit $b = \frac{k}{2}$ die halbe Kantenlänge für die ersten zwölf Punkte des stumpfen Dodekaeders. Mit den bekannten Kantenlängen lassen sich jetzt mit einfacher Vektorrechnung die restlichen Punkte ausrechnen:

$0; 1 + e; b$	$0; 1 + e; -b$	$0; -1 - e; b$	$0; -1 - e; -b$
$1 + e; b; 0$	$1 + e; -b; 0$	$-1 - e; b; 0$	$-1 - e; -b; 0$
$b; 0; 1 + e$	$-b; 0; 1 + e$	$b; 0; -1 - e$	$-b; 0; -1 - e$
$b; c; d$	$d; f; g$	$-b; c; d$	$-d; f; g$
$b; c; -d$	$d; f; -g$	$-b; c; -d$	$-d; f; -g$
$b; -c; d$	$d; -f; g$	$-b; -c; d$	$-d; -f; g$
$b; -c; -d$	$d; -f; -g$	$-b; -c; -d$	$-d; -f; -g$
$c; d; b$	$f; g; d$	$c; d; -b$	$f; g; -d$
$c; -d; b$	$f; -g; d$	$c; -d; -b$	$f; -g; -d$
$-c; d; b$	$-f; g; d$	$-c; d; -b$	$-f; g; -d$
$-c; -d; b$	$-f; -g; d$	$-c; -d; -b$	$-f; -g; -d$
$d; b; c$	$g; d; f$	$d; -b; c$	$g; -d; f$
$-d; b; c$	$-g; d; f$	$-d; -b; c$	$-g; -d; f$
$d; b; -c$	$g; d; -f$	$d; -b; -c$	$g; -d; -f$
$-d; b; -c$	$-g; d; -f$	$-d; -b; -c$	$-g; -d; -f$

mit $e = 0,6180339885$ $b = \frac{k}{2} = 0,2763932023$ $c = 1,447213595$
 $d = \frac{c}{2} = 0,7236067976$ $f = 1,170820393$ $g = 0,8944271906$

Die Eigenschaft, daß alle Eckpunkte auf einer Sphäre liegen, läßt sich schnell überprüfen, da $(1 + e)^2 + b^2 = 2,694427189$, $c^2 + d^2 + b^2 = 2,694427189$ und $d^2 + f^2 + g^2 = 2,694427189$.

Der stumpfe Dodekaeder besteht aus zwölf 10-Ecken, zwanzig 3-Ecken, neunzig Kanten und sechzig Ecken. Seine Kantenlänge beträgt nach der obigen Konstruktion $0,5527864046$.

Außerdem hat der stumpfe Dodekaeder sechs 5-Symmetrien auf den 10-Ecken, zehn 3-Symmetrien auf den 3-Ecken und fünfzehn 2-Symmetrien auf den Kanten zwischen zwei 10-Ecken.

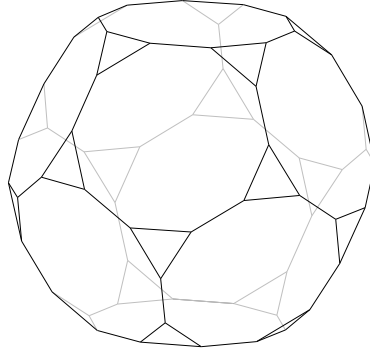


Abbildung 27: Stumpfer Dodekaeder

4.10 Der Stumpfe Ikosaeder $\{TP_{20}\}$

Den Stumpfen Ikosaeder erhalten wir einfach aus dem auf Seite 19 konstruierten Ikosaeder, bei dem wir jede Kante in drei Teile teilen. Aus der Kantenlänge des Ikosaeders $\sqrt{5} - 1 = 1,236067997$ folgt durch Dreiteilung die Kantenlänge des Stumpfen Ikosaeders $\frac{1}{3}(\sqrt{5}-1) = 0,4120226591$ und daraus die Koordinaten der Teilungspunkte der Kanten des Ikosaeders, die bei der Konstruktion auf Seite 19 mit HJ bezeichnet ist. Durch die Symmetrien des Hexaeders bekommen wir so die zu den sechs Hexaederflächen korrespondierenden zwölf Ecken. Für die restlichen müssen wir den Weg über die Vektorrechnung nehmen.

$$\begin{array}{cccc}
 0; 1; f & 0; 1; -f & 0; -1; f & 0; -1; -f \\
 1; f; 0 & 1; -f; 0 & -1; f; 0 & -1; -f; 0 \\
 f; 0; 1 & -f; 0; 1 & f; 0; -1 & -f; 0; -1 \\
 g; h; f & j; k; l & -g; h; f & -f; g; h \\
 g; -h; f & j; -k; l & -g; -h; f & -f; -g; h \\
 g; h; -f & j; k; -l & -g; h; -f & -f; g; -h \\
 g; -h; -f & j; -k; -l & -g; -h; -f & -f; -g; -h \\
 h; f; g & k; l; j & -h; f; g & -k; l; j \\
 h; -f; g & k; -l; j & -h; -f; g & -k; -l; j \\
 h; f; -g & k; l; -j & -h; f; -g & -k; l; -j \\
 h; -f; -g & k; -l; -j & -h; -f; -g & -k; -l; -j \\
 l; j; k & f; g; h & -l; j; k & -j; k; l \\
 l; -j; k & f; -g; h & -l; -j; k & -j; -k; l \\
 l; j; -k & f; g; -h & -l; j; -k & -j; k; -l \\
 l; -j; -k & f; -g; -h & -l; -j; -k & -j; -k; -l
 \end{array}$$

$$\text{mit } e = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad f = \frac{1}{3}e \quad l = \frac{2}{3}e = 0,4120226591$$

$$g = \frac{2}{3} \quad j = \frac{1}{3} \quad h = 0,7453559924 \quad k = 0,8726779962$$

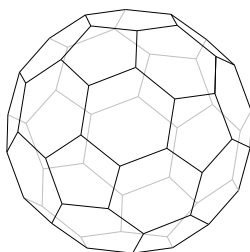


Abbildung 28: Stumpfer Ikosaeder

Um zu zeigen, daß auch bei diesem Polyeder alle Eckpunkte auf einer Sphäre liegen, müssen wir nachweisen, daß die Vektoren $(0;1;f)$, $(g;h;f)$ und $(l;j;k)$ gleich lang sind. Das heißt, mit $d_1 = \sqrt{1 + f^2}$, $d_2 = \sqrt{g^2 + h^2 + f^2}$ und $d_3 = \sqrt{l^2 + j^2 + k^2}$ muß gelten $d_1 = d_2 = d_3$:

$$d_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{3}e\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{36}} \approx 1,0209998374$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{4}{9} + 0,7453559924^2 + \left(\frac{1}{3}e\right)^2} \approx 1,0209998373$$

$$d_3 = \sqrt{\left(\frac{2}{3}e\right)^2 + \frac{1}{9} + 0,8726779962^2} \approx 1,0209998373$$

Abgesehen von Rundungsfehlern in der letzten Ziffer (aufgrund der schon gerundeten Werte für h und k) stimmen die Werte für d_1 , d_2 und d_3 überein. Alle Eckpunkte liegen damit auf einer Sphäre.

Der Stumpfe Ikosaeder besteht aus zwanzig 6-Ecken, zwölf 5-Ecken, neunzig Kanten und sechzig Ecken. Die Kantenlänge dieses Stumpfen Ikosaeders beträgt $\frac{2}{3}e$.

An Symmetrien sind bei diesem Polyeder zehn 3-Symmetrien auf den 6-Ecken, sechs 5-Symmetrien auf den 5-Ecken und fünfzehn 2-Symmetrien auf den Kanten zwischen zwei 6-Ecken zu finden. Eck-Symmetrien sind nicht vorhanden.

Dies ist der in unser heutigen Zeit wohl populärste Archimedische Polyeder, denn allwöchentlich starren Millionen von Sportfans und Fernsehzuschauer auf ihn, wenn zweiundzwanzig bunt gekleidete Männer hinter ihm herlaufen und ihn durch Tritte in Bewegung setzen; der Fußball.

4.11 Der Kubo-Oktaeder $\{C_8=(C_3+C_3)_{[\text{reg}]}\}$

Den Kubo-Oktaeder erhalten wir durch das Abschneiden der Ecken des Hexaeders wie beim Stumpfen Hexaeder. Diesemal setzen wir den Schnitt aber tiefer an und schneiden die Ecken so ab, daß sich die entstehenden 3-Ecke in der Kantenmitte berühren. Für die Koordinatenberechnung müssen wir also nur die Kanten des Hexaeders halbieren.

$$\begin{array}{lll}
1; 1; 0 & 0; 1; 1 & 1; 0; 1 \\
-1; 1; 0 & 0; -1; 1 & -1; 0; 1 \\
1; -1; 0 & 0; 1; -1 & 1; 0; -1 \\
-1; -1; 0 & 0; -1; -1 & -1; 0; -1
\end{array}$$

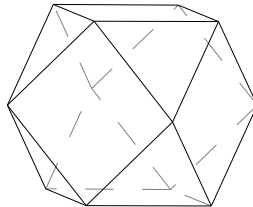


Abbildung 29: Kubo-Oktaeder

Bei diesem Polyeder kann auf Anhieb gesehen werden, daß alle Eckpunkte auf einer Sphäre liegen, da die Vektoren aller Eckpunkte $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ lang sind.

Zusammengesetzt ist der Kubo-Oktaeder aus sechs 4-Ecken, acht 3-Ecken, vierundzwanzig Kanten und zwölf Ecken. Nach dieser Konstruktion ist eine seiner Kanten $\sqrt{2}$ lang.

Bei dem Kubo-Oktaeder lassen sich die drei 4-Symmetrien auf den 4-Ecken vom Hexaeder und die vier 3-Symmetrien auf den 3-Ecken vom Oktaeder wiederfinden. Kanten-Symmetrien besitzt der Kubo-Oktaeder nicht, dafür aber sechs 2-Symmetrien auf den Ecken, die von den Kanten-Symmetrien des Oktaeders und des Hexaeders herrühren.

Wie in der Kurzschreibweise gesehen, ist auch der Kubo-Oktaeder zusammengesetzt aus zwei sogenannten 3-Kupolas (=Kuppeln), die je aus einem 6-Eck, drei 4-Ecken und vier 3-Ecken bestehen. Außerdem hat die Kurzschreibweise noch den Index [reg]; dies bedeutet, daß das Zusammenfügen der beiden Kupolas in regulärer Weise erfolgen soll, daß also das Zusammengefaßte ein höchstmögliches Maß an Regelmäßigkeit/Regularität hat. Hier bedeutet das, daß wir die Kupolas so an ihren 6-Ecken zusammenkleben, daß die Kanten von 3- und 4-Ecken sich berühren. Nur so finden wir auch die oben genannten Symmetrien.

Die alternative Zusammensetzung zweier 3-Kupolas ($\{(C_3+C_3)_{[irreg]}\}$) ist zwar auch Familienmitglied der konvexen, durch regelmäßige n -Ecke begrenzten Polyeder, aber durch das geringere Maß an Symmetrie kein Archimedisches Polyeder. So sind z.B. auch die Eck-Konfigurationen verschieden: Es tritt (3,4,3,4) auf, aber auch (3,3,4,4).

4.12 Der Ikosi-Dodekaeder $\{I_{12}=(R_5+R_5)_{[reg]}\}$

Jetzt wiederholen wir das Abschneiden der Ecken am Ikosaeder wie beim Stumpfen Ikosaeder. Nur schneiden wir auch hier wieder mehr ab, sodaß sich die ent-

stehenden 3-Ecke an ihren Ecken berühren. Also müssen wir auch hier effektiv nur die Kanten des Ikosaeders halbieren.

$$\begin{array}{cccccc}
 1+e; 0; 0 & -1-e; 0; 0 & 0; 1+e; 0 & 0; -1-e; 0 & 0; 0; 1+e & 0; 0; -1-e \\
 a; b; c & a; b; -c & a; -b; c & a; -b; -c & -a; b; c & -a; b; -c \\
 -a; -b; c & -a; -b; -c & c; a; b & c; a; -b & c; -a; b & c; -a; -b \\
 -c; a; b & -c; a; -b & -c; -a; b & -c; -a; -b & b; c; a & b; c; -a \\
 b; -c; a & b; -c; -a & -b; c; a & -b; c; -a & -b; -c; a & -b; -c; -a
 \end{array}$$

mit $e = 0,6180339885$ $a = 0,8090169943$ $b = \frac{1}{2}$ $c = 1,309016995$

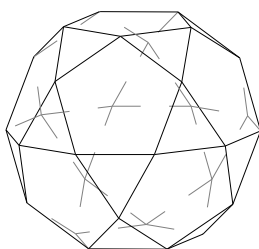


Abbildung 30: Ikosi-Dodekaeder

Abgesehen von Rundungsfehler in der letzten Ziffer durch das Rechnen mit den gerundeten Werten von a , b und c sind die Vektoren $(1+e;0;0)$ und $(a;b;c)$ gleich lang ($1,6180339885 \approx 1,618033989$); somit liegen alle Eckpunkte auf einer Sphäre.

Der Ikosi-Dodekaeder besteht zwölf 5-Ecken, zwanzig 3-Ecken, sechzig Kanten und dreißig Ecken. Die Kante hat die Länge $1+e$.

Wie beim Kubo-Oktaeder finden wir auch hier einige Flächen-Symmetrien der beiden namensgebenden Polyeder. Wir finden sechs 5-Symmetrien auf den 5-Ecken vom Dodekaeder, zehn 3-Symmetrien auf den 3-Ecken vom Ikosaeder und fünfzehn 2-Symmetrien auf den Ecken, die von den Kanten-Symmetrien des Dodekaeder bzw. Ikosaeders stammen. An Kanten-Symmetrien kann auch der Ikosi-Dodekaeder nichts vorweisen.

Außerdem besteht auch der Ikosi-Dodekaeder, wie der Kubo-Oktaeder, aus zwei kuppelförmigen Hälften, die sich hier allerdings Rotunda, genauer 5-Rotunda wegen des 5-eckigen „Daches“, nennen (siehe auch Abbildung 21 auf Seite 32). Und auch hier ist es nötig, den Index [reg] mit in die Kurzschreibweise aufzunehmen, um sicher zu gehen, daß beim Zusammenfügen 3-Eck auf 5-Eck fallen, um möglichst viele Symmetrien zu erhalten.

4.13 Zwischenbetrachtung für die nächsten vier Polyeder

Die ersten fünf Archimedischen Polyeder erhielten wir durch einfaches Abschneiden aller Ecken der Platonischen Körper, wobei wir von den ursprünglichen Kanten das mittlere Stück stehen ließen. Auch die nächsten beiden Polyeder erhielten wir durch Abschneiden aller Ecken der Platonischen Polyeder. Dabei sind wir beim Kubo-Oktaeder vom Hexaeder ausgegangen und haben dort die Ecken so tief abgeschnitten, daß sich die Schnitte benachbarter Ecken in der Kantenmitte berührten. Wie man leicht sieht, wäre derselbe Polyeder Resultat des gleichen Abschneidens aller Ecken vom Oktaeder (Dual des Hexaeders). Danach schnitten wir auch vom Ikosaeder alle Ecken so tief ab, daß sich die Schnitte in der Kantenmitte trafen und erhielten den Ikosi-Dodekaeder. Auch diesen können wir durch dieselbe Manipulation des Dodekaeder (Dual des Ikosaeders) erhalten. Diese beiden zu letzt konstruierten Archimedischen Polyeder tragen deshalb als Namen die Zusammensetzung der beiden Platonischen Polyeder und sind, wenn wir eine Serie von Abschnitten zunehmender Tiefe betrachten, genau zwischen den jeweiligen beiden Platonischen Körpern.

Als logischen nächsten Polyeder müßten wir nun eigentlich den Tetraeder tiefer beschneiden als beim Stumpfen Tetraeder. Doch die Tatsache, daß der Tetraeder zu sich selber dual ist (siehe auch Seite 22), führt dazu, daß wir keinen neuen Polyeder erhalten, sondern einen Oktaeder; er befindet sich mit zunehmender Schnitttiefe in der Mitte zwischen zwei Tetraedern.

Um jetzt noch neue Polyeder durch symmetrisches Abschneiden von Ecken zu erhalten, gehen wir also zu den schon konstruierten Polyedern über. Durch das Abschneiden aller Ecken der Stumpfen Polyeder bekommen wir aber keine Polyeder, die aus regelmäßigen n -Ecken bestehen. Bei diesen stoßen an allen Ecken drei Flächen zusammen, zwei gleichen Typs und eine andere. Deshalb erhalten wir an diesen Ecken als Vertex-Figur (siehe Seite 26) 3-Ecke mit verschieden langen Kanten.

Wir könnten jetzt auf die Idee kommen, die so erhaltenen Polyeder etwas zu verzerren, d.h. wir betrachten die Menge der Ecken und Kanten, wobei die Kanten aus Gummi sind, also variable Länge haben; auch sind die Winkel nicht fest. Jetzt verkürzen wir die langen Kanten etwas und verlängern die kurzen gleichzeitig, bis sie gleich lang sind. Erhalten wir dann neue Archimedische Polyeder?

Schneiden wir die Ecken ab und lassen die Mitte der alten Kanten stehen, dann erhalten wir unter anderem für den beschnittenen Stumpfen Tetraeder, den beschnittenen Stumpfen Oktaeder und den beschnittenen Stumpfen Ikosaeder die Eck-Konfiguration $(3,12,3,12)$, für den beschnittenen Stumpfen Hexaeder $(3,16,3,16)$ und für den beschnittenen Stumpfen Dodekaeder $(3,20,3,20)$; all diese Konfigurationen überschreiten die Winkelsummenbegrenzung weit und führen deshalb nicht zu konvexen Polyedern, geschweige denn zu Archimedische.

Auch das tiefere Beschneiden der Stumpfen Archimedischen Polyeder, sodaß sich die Schnitte in den Kantenmitten treffen, führt zu Eck-Konfigurationen

(3,6,3,6), (3,8,3,8) bzw. (3,10,3,10). Auch hier sind die Winkelsummen nicht kleiner als 360° .

Gehen wir also weiter zu den beiden zuletzt konstruierten Polyedern; dem Kubo-Oktaeder und dem Ikosi-Dodekaeder. Beim Beschneiden erhalten wir auch Vertex-Figuren, die nicht regelmäßig sind. Können wir hier vielleicht durch das Entzerren auf neue Archimedische Polyeder kommen? Die Betrachtung der dann entstehenden Eck-Konfigurationen (für den Kubo-Oktaeder (4,6,8) und (3,4,4,4) und für den Ikosi-Dodekaeder (4,6,10) und (3,4,5,4), jeweils flach und tief geschnitten) bejaht diese Frage. Entzerrte Polyeder müßten also regelmäßige Flächen und gleiche Eck-Konfigurationen haben und konvex sein.

Wie sieht man die Existenz dieser Entzerrung? Beide nicht beschnittenen Polyeder basieren auf Grundpolyeder (Hexaeder bzw. Ikosaeder), d.h. daß bei den beschnittenen Polyedern die Flächen größten Typs (abgesehen von den „Romben“) immer auf den Flächen des Grundpolyeders liegen. Schneiden wir jetzt die Ecken des Kubo-Oktaeders bzw. Ikosi-Dodekaeders ab, dann hat der resultierende Polyeder große Polygone großen Typs (mit großer Kantenlänge), Rechtecke (mit den Seiten $a \neq b$) und kleine Polygone kleinen Typs (mit kleinerer Kantenlänge).

Die dihedralen Winkel⁶ zwischen den Flächen stimmen aber schon mit denen der entzerrten Archimedischen Polyedern überein. Da die Umgebungen aller Ecken jedes dieser Polyeder äquivalent sind, betrachten wir jetzt nur die Umgebung einer Fläche kleinen Typs. Nach Konstruktion grenzen dort maximal drei verschiedene Flächen-Typen aneinander, wobei mindestens ein Rechteck dabei ist. Durch Parallelverschiebung der Ebene, auf der die Fläche kleinen Typs liegt, in Richtung Polyeder-Mittelpunkt wird die Schnittgerade dieser Ebene mit der Ebene des Rechtecks in Richtung Rechteck-Mittelpunkt um ε verschoben. Gleiches passiert mit den anderen Schnittgeraden dieser Ebene mit den Ebenen der anderen an diese Fläche kleinen Typs angrenzenden Rechtecke. Diese Schnittgeraden bilden immer eine Fläche desselben Typs, aber mit variabler Kantenlänge (abhängig von der Verschiebung um ε zum Polyeder-Mittelpunkt).

Für jedes ε betrachten wir jetzt das Rechteck: Mit wachsendem ε wachsen auch die beiden kurzen Seiten des Rechtecks gleichzeitig (aus Symmetriegründen, wenn alle Flächen kleinen Typs um ε verschoben werden). Da diese Bewegung stetig ist, existiert ein ε^* , sodaß die kurzen und langen Seiten des Rechtecks gleich werden; wir erhalten (regelmäßige) 4-Ecke.

Die Ecken der Flächen großen Typs machen mit wachsendem ε auch alle gleichzeitig eine solche Bewegung mit, daß sich die Ebenen durch diese Flächen parallel vom Polyeder-Mittelpunkt weg verschieben, sodaß für alle ε eine Fläche großen Typs mit den verkürzten langen Kanten der Rechtecke entsteht. Bei ε^* haben also alle Kanten die gleiche Länge und der neue Polyeder besteht aus

⁶Der dihedrale Winkel ist der Winkel, den die Schnittlinien der beiden Flächen mit der Ebene senkrecht zur gemeinsamen Kante zueinander haben. Es ist also der Winkel der beiden Flächen zueinander.

4-Ecken und Flächen großen und kleinen Typs. Wir erhalten einen entzerrten Archimedischen Körper.

Also haben wir für die nächsten vier Polyeder Konstruktionsansätze; ausgehend vom Kubo-Oktaeder und vom Ikosi-Dodekaeder je ein tiefes und ein flaches Abschneiden aller Ecken und anschließendes Entzerren.

4.14 Der Romben-Kubo-Oktaeder $\{RC_8 = (C_4 + Pr_8 + C_4)_{[reg]}\}$

Beim Romben-Kubo-Oktaeder müssen wir uns vorstellen, einem Kubo-Oktaeder alle Ecken so abzuschneiden, daß die so entstehenden Rechtecke sich an den Ecken berühren. Wir suchen aber nach den Koordinaten des entzerrten Polyeders. Aus diesem Grund können wir die Eck-Koordinaten des Romben-Kubo-Oktaeder nicht durch Kanteilung des Kubo-Oktaeders berechnen, sondern müssen gewisse 4-Ecke auf den Flächen des Hexaeders finden, sodaß alle Kanten des entstehenden Polyeders gleich sind.

Wir machen uns jetzt zu Nutze, daß der gesuchte Polyeder aus drei Gürteln, bestehend aus je acht 4-Ecken, zusammengesetzt ist in einer Art und Weise, daß sich die Gürtel durchdringen und je in xy -, xz - und yz -Ebene liegen. Da jeweils vier der acht 4-Ecke auf den Flächen des Hexaeders liegen und die anderen vier mit Hexaeder-Kanten korrespondieren, suchen wir also nur ein in ein 4-Eck der Kantenlänge 2 eingeschriebenes 8-Eck. Dieses 8-Eck hat also einen Inkreis mit Radius 1. Mit der Tangensfunktion folgt aus dem halben Komplementärwinkel des 8-Ecks ($= \frac{45^\circ}{2} = 22,5^\circ$) und der Ankathete 1 (=Radius des Inkreises) die Gegenkathete g (=halbe Kantenlänge) und die Kantenlänge k des Romben-Kubo-Oktaeders:

$$g = \frac{k}{2} = 1 \cdot \tan 22,5^\circ \Rightarrow k = 2 \cdot \tan 22,5^\circ = 0,8284271247.$$

Die Koordinaten der acht Ecken müssen wir aber nicht alle berechnen; ein Punkt genügt. Und dieser hat, da er auf einer Fläche des Hexaeders liegt, in einer Koordinate eine 1, die anderen beiden Koordinaten müssen positiv oder negativ und dem Wert nach die halbe Kantenlänge, also g sein.

$$\begin{array}{cccc} 1; g; g & 1; g; -g & 1; -g; g & 1; -g; -g \\ -1; g; g & -1; g; -g & -1; -g; g & -1; -g; -g \\ g; 1; g & g; 1; -g & -g; 1; g & -g; 1; -g \\ g; -1; g & g; -1; -g & -g; -1; g & -g; -1; -g \\ g; g; 1 & g; -g; 1 & -g; g; 1 & -g; -g; 1 \\ g; g; -1 & g; -g; -1 & -g; g; -1 & -g; -g; -1 \end{array}$$

$$\text{mit } g = \frac{k}{2} = \tan 22,5^\circ = 0,4142135624$$

Da die Vektoren aller Eckpunkte die Form $(\pm 1; \pm g; \pm g)$ bzw. dessen Permutation haben, ist es klar, daß alle Ecken des Romben-Kubo-Oktaeders auf einer Sphäre liegen.

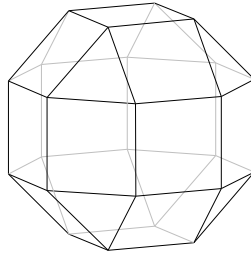


Abbildung 31: Romben-Kubo-Oktaeder

Zusammengesetzt ist dieser Körper aus achtzehn 4-Ecken, acht 3-Ecken, achtundvierzig Kanten und vierundzwanzig Ecken. Die Länge jeder Kante beträgt k .

Der Romben-Kubo-Oktaeder hat drei 4-Symmetrien auf den 4-Ecken, die an vier 3-Ecke grenzen, sechs 2-Symmetrien auf den 4-Ecken, die an nur zwei 3-Ecken liegen, vier 3-Symmetrien auf den 3-Ecken. Kanten- oder Eck-Symmetrien können wir nicht finden.

Auch in dem Romben-Kubo-Oktaeder können wir andere regelmäßige n -Ecke erkennen, nämlich sechs 8-Ecke - dies haben wir ja auch bei der Berechnung ausgenutzt. Aus diesem Grunde kann auch dieser Archimedische Polyeder in Teile zerlegt werden, in einen 8-Prisma ($=\{\text{Pr}_8\}$) in der Mitte (einer unserer Gürtel!) und in zwei kuppelartige Gebilde darüber und darunter. Da diese wie die 3-Kupola aufgebaut sind, nur als „Dach“ ein 4-Eck anstatt eines 3-Ecks haben, nennen wir diese einfach 4-Kupola (siehe auch Seite 32, Abbildung 21). Beim Zusammensetzen dieser drei Polyeder haben wir aber nicht die Möglichkeit, 3-Eck auf 4-Eck zu legen, da der Gürtel dazwischen ist. Und trotzdem ist der Index [reg] auch hier nötig. Stellen wir uns vor, wir würden eine 4-Kupola um ein achtel verdreht auf das 8-Prisma kleben (dieser Polyeder nennt sich Millers Körper). Damit berühren jetzt acht 4-Ecke jeweils drei 3-Ecke, zwei an den Spitzen, eine an einer Kante. Immernoch sind jetzt zwar alle Eck-Konfigurationen gleich, doch sind die Ecken selber nicht mehr alle austauschbar, das heißt nicht mehr äquivalent. Denn die sechzehn Ecken des Gürtels sind jetzt gegenüber den acht Ecken der beiden Kupola-Dächern ausgezeichnet, denn sie grenzen an die 4-Ecke an, die jetzt mit drei 3-Ecken in Kontakt stehen. Dieses verringert aber das Maß an Symmetrie und führt deshalb nicht zu einem Archimedischen Körper.

Hier sollte noch einmal darauf hingewiesen werden, daß die vollständige Definition einer Polyeder-Familie wichtig ist. Historisch gesehen, wurde bei unserer Definition der Archimedischen Polyeder oft die Bedingung „äquivalente Ecken“ durch „gleiche Eck-Konfigurationen“ wie bei den Platonischen Polyedern, wohl aus ästhetischen Gründen oder wider besseren Wissens, ausgetauscht. Man ging wohl damals implizit davon aus, daß alle Ecken gleichwertig sein sollten, doch

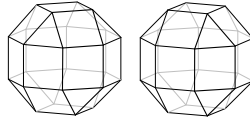


Abbildung 32: Vergleich von Millers Körper $\{RC_8\}_{[irreg]}$ und dem Romben-Kubo-Oktaeder $\{RC_8\}_{[reg]}$

führten die etwas lascheren Definitionen oft zu Entdeckungen weiterer Pseudo-Archimedischen Polyeder wie Millers Körper.

4.15 Der Große Romben-Kubo-Oktaeder $\{gRC_8\}$

Beim Romben-Kubo-Oktaeder haben wir zuerst die Ecken tief abgeschnitten, sodaß die Schnitte sich an den Mittelpunkten der ursprünglichen Kanten trafen. Schneiden wir jetzt etwas flacher ab, so erhalten wir verzerrte Rechtecke von den fehlenden Ecken, 6-Ecke für die ursprünglichen 3-Ecke und für die 4-Ecke 8-Ecke auf den Flächen des Hexaeders.

Gesucht sind die beiden anderen Koordinaten a und b eines Punktes auf einem 4-Eck des Hexaeders, ausgehend vom Flächenmittelpunkt, da die dritte Koordinate mit der der Fläche identisch 1 ist. Die Koordinaten der restlichen anderen Ecken des Großen Romben-Kubo-Oktaeders sind dann die Kombinationen von $1, -1, a, -a, b$ und $-b$.

Sei k die Kantenlänge des Großen Romben-Kubo-Oktaeders. Dann wissen wir, daß sich eine Kante des Hexaeders ($= 2$) aus einer gRC_8 -Kante k und vier Teilen zusammen setzt, die den Kosinus-Betrag der Länge einer gRC_8 -Kante haben, die um 45° abgelenkt ist (also $k\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow k + 4k\sqrt{\frac{1}{2}} = 2$).

Also ist $k = \frac{2}{1+4\sqrt{\frac{1}{2}}} = 0,5224077498$. Folglich ist $a = \frac{k}{2} = 0,2612038749$ und $b = \frac{k}{2} + k\sqrt{\frac{1}{2}} = a + k\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,6306019373$.

$1; a; b$	$1; a; -b$	$1; -a; b$	$1; -a; -b$
$-1; a; b$	$-1; a; -b$	$-1; -a; b$	$-1; -a; -b$
$1; b; a$	$1; b; -a$	$1; -b; a$	$1; -b; -a$
$-1; b; a$	$-1; b; -a$	$-1; -b; a$	$-1; -b; -a$
$a; 1; b$	$a; 1; -b$	$-a; 1; b$	$-a; 1; -b$
$a; -1; b$	$a; -1; -b$	$-a; -1; b$	$-a; -1; -b$
$b; 1; a$	$b; 1; -a$	$-b; 1; a$	$-b; 1; -a$
$b; -1; a$	$b; -1; -a$	$-b; -1; a$	$-b; -1; -a$
$a; b; 1$	$a; -b; 1$	$-a; b; 1$	$-a; -b; 1$
$a; b; -1$	$a; -b; -1$	$-a; b; -1$	$-a; -b; -1$
$b; a; 1$	$b; -a; 1$	$-b; a; 1$	$-b; -a; 1$
$b; a; -1$	$b; -a; -1$	$-b; a; -1$	$-b; -a; -1$

mit $a = 0,2612038749$ $b = 0,6306019373$

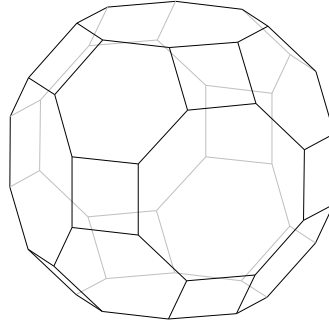


Abbildung 33: Großer Romben-Kubo-Oktaeder

Auch hier ist der Nachweis der Gleichheit der Längen der Vektoren aller Eckpunkte trivial. Alle Ecken liegen auf einer Sphäre.

Der Große Romben-Kubo-Oktaeder ist aufgebaut aus sechs 8-Ecken, acht 6-Ecken, zwölf 4-Ecken, zweiundsiebzig Kanten und achtundvierzig Ecken. Die Kantenlänge beträgt k .

An Symmetrien hat dieser Polyeder drei 4-Symmetrien auf den 8-Ecken, vier 3-Symmetrien auf den 6-Ecken und sechs 2-Symmetrien auf den 4-Ecken vorzuweisen. Kanten- oder Eck-Symmetrien gibt es nicht.

4.16 Der Romben-Ikosi-Dodekaeder $\{\text{RI}_{12} = (\text{RI}_{12}^{-3} + 3 \cdot \text{C}_5)_{[\text{reg}]}\}$

Der Ansatz für diesen Archimedischen Polyeder folgt aus dem tiefen Abschneiden der Ecken des Ikosi-Dodekaeders; nach Entzerrung (siehe Seite 49) erhalten wir den Romben-Ikosi-Dodekaeder. Deshalb können wir auch nicht, wie vom Hexaeder zum Kubo-Oktaeder, durch Teilung der Kanten die neuen Ecken erhalten, sondern müssen diese auf einer Fläche suchen. Der Einfachheit halber gehen wir von einem Dodekaeder aus und nutzen vom Hexaeder nur seine Symmetrien. Die Koordinaten der Eckpunkte des Romben-Ikosi-Dodekaeder lassen sich über/außerhalb der Flächen des Dodekaeders finden, jeweils fünf über jedem 5-Eck. Konstruktiv beschrieben werden die Koordinaten der fünf oberen Eckpunkte einer in der Höhe halbierten und auf das 5-Eck des Dodekaeders geklebten 5-Kupola gesucht.

Sei k die Kantenlänge des Romben-Ikosi-Dodekaeders. Wir wissen nach dem Seitenkosinussatz⁷ von der 5-Kupola (ein 10-Eck, fünf 4-Ecken, fünf 3-Ecken und ein 5-Eck als Dach), daß der dihedrale Winkel zwischen 4-Eck und 10-Eck

⁷

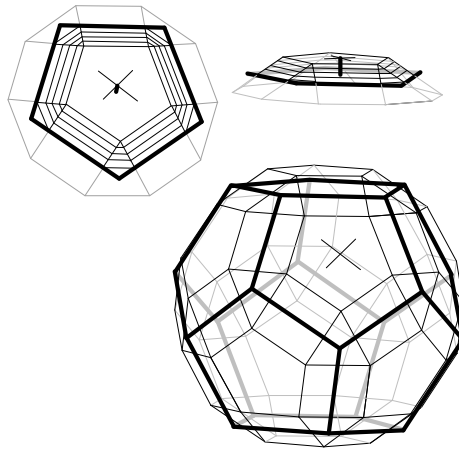


Abbildung 34: Konstruktion des Romben-Ikosi-Dodekaeders

$\alpha = 31,71747441^\circ$ beträgt. Da wir nur die Hälfte des 4-Ecks in diesem Winkel nach oben gehen müssen, beträgt die Höhe h des 5-Ecks der halben 5-Kupola über/außerhalb des Dodekaeders $h = \frac{k}{2} \sin \alpha$.

Um k auszurechnen, vergleichen wir den Radius des Inkreises eines 5-Ecks des ursprünglichen Dodekaeders mit der Summe aus dem Inradius des 5-Ecks der 5-Kupola und dem Kosinus des schrägen, halben 4-Ecks unserer 5-Kupola, nämlich $\frac{k}{2} \cos \alpha$; daraus berechnen wir k :

Sei p Kantenlänge des (auf Seite 21) konstruierten Dodekaeders; dann ist der Inkreisradius eines 5-Ecks des Dodekaeders $r_1 = \frac{p}{2 \tan 36^\circ}$. Andererseits ist $r_1 = \frac{k}{2} \cos \alpha + r_2$ mit r_2 Radius des Inkreises des 5-Ecks unserer 5-Kupola. $r_2 = \frac{\frac{k}{2}}{2 \tan 36^\circ} \Rightarrow \frac{p}{2 \tan 36^\circ} = \frac{k}{2} \cos \alpha + \frac{1}{\tan 36^\circ} \Rightarrow \frac{k}{2} = \frac{p \cot 36^\circ}{2(\cos \alpha + \cot 36^\circ)}$.

Mit $p = 2e = 1,236067977$ folgt $\frac{k}{2} = 0,3819660111$ und $k = 0,7639320222$.

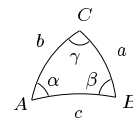
Zur einfacheren Berechnung sollten wir die Koordinaten der sechs 4-Ecke des Romben-Ikosi-Dodekaeder, die mit den Kanten des Dodekaeders korrespondieren, die in einer Koordinate eine null haben, zuerst berechnen und schließlich ausgehend von diesen durch Parallelverschiebung entlang der Kanten des Dodekaeders um die Länge k die restlichen Eckpunkte.

Der Seitenkosinussatz ist ein Satz über sphärische 3-Ecke und sagt folgendes aus:

$$\cos c_* = \cos a_* \cos b_* + \sin a_* \sin b_* \cos \gamma$$

wobei a, b und c bzw. α, β und γ zyklisch vertauscht werden können. Dabei sind $a_* := \frac{a}{R}$,

$b_* := \frac{b}{R}$ und $c_* := \frac{c}{R}$ mit R dem Radius der Sphäre, a, b und c den Seiten des sphärischen 3-Ecks und α, β und γ die Innenwinkel gegenüber a, b bzw. c .



$b; 1+e; b$	$b; 1+e; -b$	$b; -1-e; b$	$b; -1-e; -b$
$-b; 1+e; b$	$-b; 1+e; -b$	$-b; -1-e; b$	$-b; -1-e; -b$
$1+e; b; b$	$1+e; -b; b$	$-1-e; b; b$	$-1-e; -b; b$
$1+e; b; -b$	$1+e; -b; -b$	$-1-e; b; -b$	$-1-e; -b; -b$
$b; b; 1+e$	$-b; b; 1+e$	$b; b; -1-e$	$-b; b; -1-e$
$b; -b; 1+e$	$-b; -b; 1+e$	$b; -b; -1-e$	$-b; -b; -1-e$
$2e; e; 1$	$-2e; e; 1$	$2e; -e; 1$	$-2e; -e; 1$
$2e; e; -1$	$-2e; e; -1$	$2e; -e; -1$	$-2e; -e; -1$
$1; 2e; e$	$1; -2e; e$	$1; 2e; -e$	$1; -2e; -e$
$-1; 2e; e$	$-1; -2e; e$	$-1; 2e; -e$	$-1; -2e; -e$
$e; 1; 2e$	$e; 1; -2e$	$-e; 1; 2e$	$-e; 1; -2e$
$e; -1; 2e$	$e; -1; -2e$	$-e; -1; 2e$	$-e; -1; -2e$
$c; 1; 0$	$-c; 1; 0$	$c; -1; 0$	$-c; -1; 0$
$1; 0; c$	$1; 0; -c$	$-1; 0; c$	$-1; 0; -c$
$0; c; 1$	$0; -c; 1$	$0; c; -1$	$0; -c; -1$

mit

$$e = 0,6180339885 \quad b = e^2 = 0,3819660111 \quad c = 1+b = 1+e^2 = 1,3819660111$$

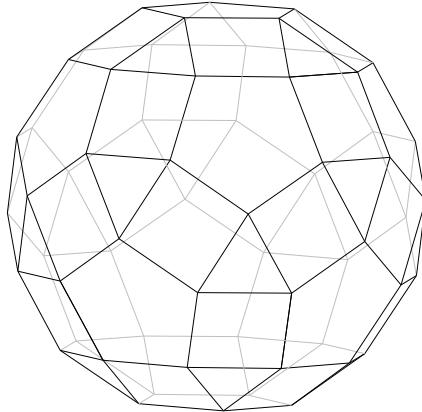


Abbildung 35: Romben-Ikosi-Dodekaeder

Die Vektoren der Eckpunkte sind $(1+e;b;b)$, $(2e;e;1)$, $(c;1;0)$ und deren Permutationen. Um zu beweisen, daß hier alle Ecken auf einer Sphäre liegen, müssen wir zeigen, daß die Vektoren gleich lang sind. Dabei nutzen wir die Zusammenhänge $(1+e)^2 = (1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2})^2 = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1}{4}(1+5+2\sqrt{5}) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = 2+e$, $(1-e)^2 = (1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2})^2 = (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{5} = 2-3e$ und $e^2 = (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2 = \frac{1}{4}(5-2\sqrt{5}+1) = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = 1-e$ aus:

$$\begin{aligned}\sqrt{(1+e)^2 + 2b^2} &= \sqrt{2+e+2e^4} = \sqrt{2+e+2(1-e)^2} \\ &= \sqrt{2+e+2(2-3e)} \\ &= \sqrt{6-5e}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{(2e)^2 + e^2 + 1} &= \sqrt{5e^2 + 1} = \sqrt{5(e-1) + 1} \\ &= \sqrt{6-5e}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{(1+e^2)^2 + 1} &= \sqrt{2+2e^2+e^4+1} = \sqrt{2+2(1-e)+(1-e)^2} \\ &= \sqrt{2+2-2e+2-3e} = \sqrt{6-5e} \\ &\approx 1,7058223988\end{aligned}$$

Alle Ecken liegen also auf einer Sphäre.

Zwölf 5-Ecke, dreißig 4-Ecke, zwanzig 3-Ecke, hundertzwanzig Kanten und sechzig Ecken bilden zusammen den Romben-Ikosi-Dodekaeder. Die Kantenlänge nach obiger Konstruktion ist k .

Der Romben-Ikosi-Dodekaeder hat sechs 5-Symmetrien auf den 5-Ecken, fünfzehn 2-Symmetrien auf den 4-Ecken und zehn 3-Symmetrien auf den 3-Ecken.

Auch der Romben-Ikosi-Dodekaeder ist aus kleineren Polyedern zusammengesetzt. Wir finden insgesamt zwölf regelmäßige 10-Ecke, die innerhalb dieses Archimedischen Polyeders liegen. Allerdings können wir nicht alle diese 10-Ecke durch Abschneiden von 5-Kupolas freilegen, da sie sich überschneiden. Maximal können wir gleichzeitig drei Kupolas abtrennen, sodaß der Romben-Ikosi-Dodekaeder aus drei 5-Kupolas und einem Rest zusammengesetzt ist. Um diesen Rest einigermaßen sinnvoll zu benennen, gehe ich einfach wieder den konstruktiven Weg mit Hilfe chemischer Notationen: $\text{RI}_{12} - 3 \cdot \text{C}_5 = \text{RI}_{12}^{-3}$.

Auch hier gibt es beim Zusammenfügen einer Kupola mit dem Rest wieder eine reguläre und eine irreguläre Version. Deshalb hat dieser Polyeder in der Kurzschreibweise auch noch den Index [reg].

4.17 Der Große Romben-Ikosi-Dodekaeder $\{\text{gRI}_{12}\}$

Durch flacheres Abschneiden der Ecken des Ikosi-Dodekaeder und des Entzerrens (siehe Seite 49) danach erhalten wir den Großen Romben-Ikosi-Dodekaeder. Die Koordinaten seiner Eckpunkte lassen sich auf ähnliche Weise finden wie die des Großen Romben-Kubo-Oktaeders. Sie befinden sich, je zehn, über/außerhalb der Flächen des Dodekaeders.

Sei k die Kantenlänge des Großen Romben-Ikosi-Dodekaeders und p die des Dodekaeders. Zuerst müssen wir k ausrechnen:

Ausgehend von einem 10-Eck des Großen Rhomben-Ikosi-Dodekaeders berechnen wir aus dem Seitenkosinus- und dem Winkelkosinussatz⁸ den dihedralen Winkel zwischen 10-Eck und 4-Eck. Dieser beträgt $\alpha = 148,28252559^\circ$. Jetzt folgt aus dem Radius des Inkreises eines 5-Ecks des Dodekaeders $r_1 = \frac{p}{2 \tan 36^\circ}$ und dem Radius des Inkreises eines 10-Ecks des Großen Rhomben-Ikosi-Dodekaeders $r_2 = \frac{k}{2 \tan 18^\circ}$ die Relation $r_1 = r_2 + x$ mit x dem Anteil des schrägen halben 4-Ecks, $x = \frac{k}{2} \cos 180^\circ - \alpha \Rightarrow \frac{p}{2 \tan 36^\circ} = k \frac{1}{2 \tan 18^\circ} + \frac{\cos(180^\circ - \alpha)}{2}$ mit $p = 2 \cdot e = \sqrt{5} - 1 = 1,236067997 \Rightarrow k = \frac{\sqrt{5}-1}{\tan 36^\circ (\cos(180^\circ - \alpha) + \frac{1}{\tan 18^\circ})} = 0,4330847294$.

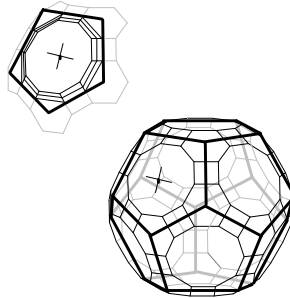


Abbildung 36: Konstruktion des Großen Rhomben-Ikosi-Dodekaeders (vergleiche Abbildung 34 auf Seite 55)

Weiterhin können wir den Sinusanteil des schrägen halben 4-Ecks h bestimmen: $h = \frac{k}{2} \sin(180^\circ - \alpha) = 0,1138430585$.

Konstruktiv beschrieben müssen wir jetzt also für jede Kante des Dodekaeders vier Eckpunkte berechnen:

Ausgehend von der Mitte der Kante im Abstand $\frac{k}{2}$ entlang der Kante gehen, von da senkrecht zur Kante auf beiden Flächen um x und dann auf beiden Flächen von dort senkrecht aus dem Dodekaeder heraus um h . Die so erhaltenen neuen Punkte sind die Eckpunkte des Großen Rhomben-Ikosi-Dodekaeders.

Zur einfacheren Berechnung sollten wir die Koordinaten der sechs 4-Ecke des Großen Rhomben-Ikosi-Dodekaeders, die mit den Kanten des Dodekaeders korrespondieren, die in einer Koordinate eine null haben, zuerst berechnen und

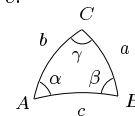
8

Der Winkelkosinussatz ist wie der Seitenkosinussatz (Seite 55) ein Satz über sphärische 3-Ecke und sagt folgendes aus:

$$\cos \gamma = \sin \alpha \sin \beta \cos c_* - \cos \alpha \cos \beta$$

wobei a, b und c bzw. α, β und γ zyklisch vertauscht werden können. Dabei sind auch hier

$a_* := \frac{a}{R}$, $b_* := \frac{b}{R}$ und $c_* := \frac{c}{R}$ mit R dem Radius der Sphäre, a, b und c den Seiten des sphärischen 3-Ecks und α, β und γ die Innenwinkel gegenüber a, b bzw. c .



schließlich ausgehend von diesen durch Parallelverschiebung entlang der Kanten des Dodekaeders um die Länge der Diagonalen des 10-Ecks die restlichen Eckpunkte. Diese Diagonalen des 10-Ecks mit Kantenlänge k sind: Diagonale g , die ausgehend von einem Eckpunkt, den nächsten und übernächsten Nachbareckpunkt überspringt und zum überübernächsten Eckpunkt geht. Und die Diagonale h , die das 10-Eck genau in der Mitte teilt, also vier Eckpunkte überspringt.

Berechnen von g und h : $g = k + 2k \cos 36^\circ = k(\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2) = 1,133830541$;
 $h = \frac{k}{\sin 18^\circ} = 1,401491624$.

$b; 1 + e; b$	$b; 1 + e; -b$	$-b; 1 + e; b$	$-b; 1 + e; -b$
$b; -1 - e; b$	$b; -1 - e; -b$	$-b; -1 - e; b$	$-b; -1 - e; -b$
$1 + e; b; b$	$1 + e; -b; b$	$1 + e; b; -b$	$1 + e; -b; -b$
$-1 - e; b; b$	$-1 - e; -b; b$	$-1 - e; b; -b$	$-1 - e; -b; -b$
$b; b; 1 + e$	$-b; b; 1 + e$	$b; -b; 1 + e$	$-b; -b; 1 + e$
$b; b; -1 - e$	$-b; b; -1 - e$	$b; -b; -1 - e$	$-b; -b; -1 - e$
$g; m; t$	$g; m; -t$	$-g; m; t$	$-g; m; -t$
$g; -m; t$	$g; -m; -t$	$-g; -m; t$	$-g; -m; -t$
$m; t; g$	$m; -t; g$	$m; t; -g$	$m; -t; -g$
$-m; t; g$	$-m; -t; g$	$-m; t; -g$	$-m; -t; -g$
$t; g; m$	$-t; g; m$	$t; -g; m$	$-t; -g; m$
$t; g; -m$	$-t; g; -m$	$t; -g; -m$	$-t; -g; -m$
$n; p; b$	$n; p; -b$	$n; -p; b$	$n; -p; -b$
$-n; p; b$	$-n; p; -b$	$-n; -p; b$	$-n; -p; -b$
$p; b; n$	$p; -b; n$	$-p; b; n$	$-p; -b; n$
$p; b; -n$	$p; -b; -n$	$-p; b; -n$	$-p; -b; -n$
$b; n; p$	$-b; n; p$	$b; n; -p$	$-b; n; -p$
$b; -n; p$	$-b; -n; p$	$b; -n; -p$	$-b; -n; -p$
$k; j; t$	$k; j; -t$	$k; -j; t$	$k; -j; -t$
$-k; j; t$	$-k; j; -t$	$-k; -j; t$	$-k; -j; -t$
$j; t; k$	$j; -t; k$	$-j; t; k$	$-j; -t; k$
$j; t; -k$	$j; -t; -k$	$-j; t; -k$	$-j; -t; -k$
$t; k; j$	$-t; k; j$	$t; k; -j$	$-t; k; -j$
$t; -k; j$	$-t; -k; j$	$t; -k; -j$	$-t; -k; -j$
$q; r; s$	$q; r; -s$	$q; -r; s$	$q; -r; -s$
$-q; r; s$	$-q; r; -s$	$-q; -r; s$	$-q; -r; -s$
$r; s; q$	$r; -s; q$	$-r; s; q$	$-r; -s; q$
$r; s; -q$	$r; -s; -q$	$-r; s; -q$	$-r; -s; -q$
$s; q; r$	$-s; q; r$	$s; q; -r$	$-s; q; -r$
$s; -q; r$	$-s; -q; r$	$s; -q; -r$	$-s; -q; -r$

mit $e = 0,6180339885$ $k = 0,4330847294$ $b = \frac{k}{2} = 0,2165423647$

$g = 1,133830541$ $m = 1,051118718$ $t = 0,5669152705$

$n = 1,350372905$ $p = 0,917288176$ $j = 1,484203447$

$$q = 0,7834576345 \quad r = 1,267661082 \quad s = 0,7007458113$$

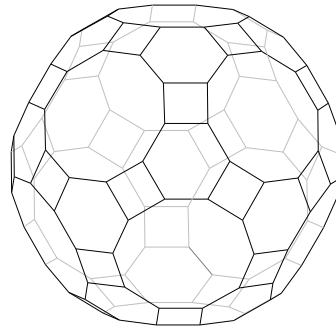


Abbildung 37: Großer Rhomben-Ikosi-Dodekaeder

Um zu zeigen, daß alle Ecken dieses Polyeders auf einer Sphäre liegen, müssen wir wieder zeigen, daß deren Vektoren alle gleich lang sind:

$$\begin{aligned} \sqrt{2b^2 + (1 + e)^2} &= 1,646758992 \\ \sqrt{g^2 + m^2 + t^2} &= 1,646758992 \\ \sqrt{b^2 + n^2 + p^2} &= 1,646758991 \\ \sqrt{j^2 + k^2 + t^2} &= 1,646758992 \\ \sqrt{q^2 + r^2 + s^2} &= 1,646758991 \end{aligned}$$

Der Große Rhomben-Ikosi-Dodekaeder ist aus zwölf 10-Ecken, zwanzig 6-Ecken, dreißig 4-Ecken, hundertachtzig Kanten und hundertzwanzig Ecken. Seine Kantenlänge ist k .

An Symmetrien kann der Große Rhomben-Ikosi-Dodekaeder sechs 5-Symmetrien auf den 10-Ecken, zehn 3-Symmetrien auf den 6-Ecken und fünfzehn 2-Symmetrien auf den 4-Ecken vorweisen.

4.18 Der Schräge Hexaeder $\{S_6^{[l]}\}$

Die letzten beiden Archimedischen Polyeder lassen sich nicht durch gerades Abschneiden (d.h. senkrecht zu einer durch den Polyedermittelpunkt gedachten Linie) erhalten. Hier müssen die resultierenden Flächen auch verdreht werden. Dadurch werden aus den Rhomben – den von den abgeschnittenen Ecken übrig gebliebenen 4-Ecken – zwei 3-Ecke mit variablen Kantenlängen. Bei einer bestimmten Drehung sind dann alle Kanten gleich lang.

Die Koordinaten der Eckpunkte dieses Polyeders lassen sich auf den Flächen des Hexaeders finden, je vier auf einer Fläche. Dabei sind die vier Punkte auf

einem 4-Eck wieder wie ein (kleineres) 4-Eck zentral angeordnet, allerdings um einen Winkel α gedreht. Da diese Drehung links oder rechts herum ausgeführt werden kann, existieren zwei Isomere (siehe auch Seite 30), bezeichnet durch den Index $[l]$ oder $[r]$ (wenn wir die Spiegelung nicht als Identitätsabbildung betrachten!). Wenn Orientierungen wie links und rechts allerdings nicht definiert sind, können beide Isomere als identisch betrachtet werden.

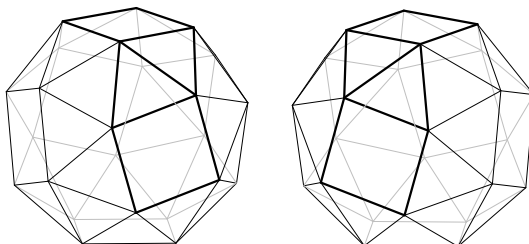


Abbildung 38: Die beiden Isomere $S_6^{[r]}$ und $S_6^{[l]}$ des Schrägen Hexaeders

Die Schwierigkeit liegt jetzt darin, einerseits den Winkel α , andererseits die Kantenlänge k des Schrägen Hexaeders zu bestimmen.

Da das rein-algebraische Berechnen von Winkel und Kantenlänge sehr umständlich ist, ziehe ich einen mehr numerischen Ansatz für die Berechnungen vor: Ein Programm (ab Seite 84), das aus gegebenen k und α die Koordinaten der Eckpunkte der kleinen Quadrate berechnet und die Abstände zwischen benachbarten Punkten ausgibt. Angefangen bei $\alpha = 0^\circ$ sieht der Polyeder dem Romben-Kubo-Oktaeder ähnlich, wobei die 4-Ecke zwischen den auf der Oberfläche des Würfels liegenden Quadraten als zwei koplanare rechtwinklige, gleichschenklige 3-Ecke zu betrachten sind. Sei a die Länge der Hypotenuse dieser gleichschenkligen 3-Ecke und b die Länge der Schenkel. Bei wachsendem α wächst b langsam und a verkleinert sich schneller. Bei einem bestimmten α sind a und b gleich lang. Nun wird k erhöht um den halben Unterschied zwischen b und a und erneut bei $\alpha = 0^\circ$ angefangen. Auf diese Art und Weise nähern sich a , b und k immer weiter an. Die Näherungswerte sind: $k = a = b = 0,8751865720$ bei $\alpha = 28,5324395996^\circ$.

Daraus folgen die Polyeder-relevanten Konstanten $x = 0,5436890127$ und $y = 0,2955977425$. Und mit der Hilfe der Symmetrien des Hexaeders (ohne Siegel-Symmetrien) kommen wir dann auf alle Kombinationen von $1, -1, x, -x, y$ und $-y$, was dann die restlichen Eckpunkte ergibt.

Um sicher zu gehen, daß zwischen errechneten Eckpunkten auch die richtigen Entfernungen sind, habe ich alle Kantenlängen probehalber nachgerechnet und bestätigt.

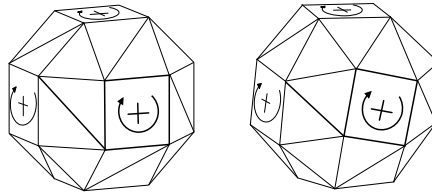


Abbildung 39: Programmprinzip zur Berechnung des Schrägen Hexaeders (Verdrehung aller 4-Ecke zur Verkürzung der langen 3-Eck-Seiten)

$$\begin{array}{cccc}
 x; y; 1 & -y; x; 1 & -x; -y; 1 & y; -x; 1 \\
 y; x; -1 & -x; y; -1 & -y; -x; -1 & x; -y; -1 \\
 y; 1; x & x; 1; -y & -y; 1; -x & -x; 1; y \\
 x; -1; y & y; -1; -x & -x; -1; -y & -y; -1; x \\
 1; x; y & 1; -y; x & 1; -x; -y & 1; y; -x \\
 -1; y; x & -1; -x; y & -1; -y; -x & -1; x; -y
 \end{array}$$

mit $x = 0,5436890127$ $y = 0,2955977425$

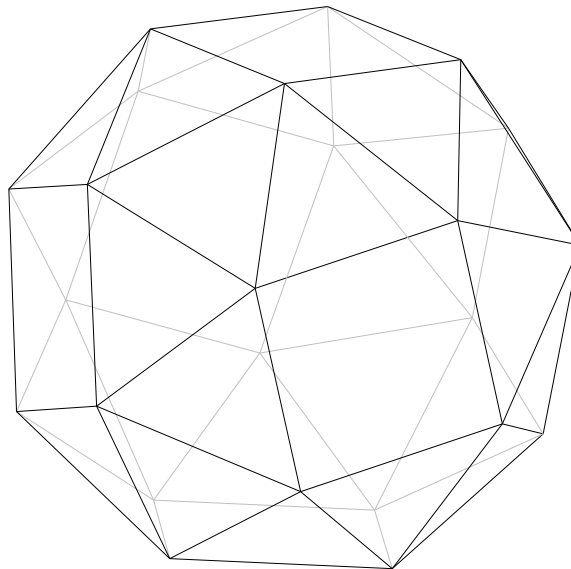


Abbildung 40: (linker) Schräger Hexaeder

Auch bei diesem Polyeder sieht man sofort, daß alle Eckpunkte auf einer Sphäre durch den Ursprung liegen, da alle Eck-Koordinaten die Form $(1; x; y)$ haben.

Der Schräge Hexaeder hat sechs 4-Ecke, zweiunddreißig 3-Ecke, sechzig Kanten und vierundzwanzig Ecken. Dieser in den oben beschriebenen Hexaeder eingeschriebene Polyeder hat die Kantenlänge k .

Symmetrisch betrachtet hat der Schräge Hexaeder gemeinsame Eigenschaften mit den beiden Platonischen Polyedern, in die er so eingeschrieben werden kann, daß einige seiner Flächen auf den Flächen dieser liegen; der Hexaeder und der Oktaeder (Die Spitzen-3-Ecke liegen auf den Flächen eines Oktaeders!). Wir können die sechs 4-Symmetrien auf den 4-Ecken vom Hexaeder finden und die vier 3-Symmetrien auf den 3-Ecken, die nur mit anderen 3-Ecken gemeinsame Kanten haben, vom Oktaeder. Die anderen 3-Ecke und die Kanten und Ecken weisen keine Symmetrien auf.

4.19 Der Schräge Dodekaeder $\{S_{12}^{[l]}\}$

Die Koordinaten der Eckpunkte dieses Archimedischen Polyeders lassen sich auf den Flächen des Dodekaeders finden, je fünf auf jeder Fläche. Dabei sind die fünf Punkte auf einem 5-Eck wieder wie ein (kleineres) 5-Eck zentral angeordnet, allerdings wie beim Schrägen Hexaeder um einen Winkel α gedreht, wobei dieser Winkel nicht gleich dem Drehwinkel beim Schrägen Hexaeder ist. Allerdings ist auch hier die Drehung links oder rechts herum möglich, existieren auch hier zwei Isomere (siehe auch Seite 30) mit Index $[l]$ und $[r]$ (wenn wir die Spiegelung nicht als Identitätsabbildung betrachten!).

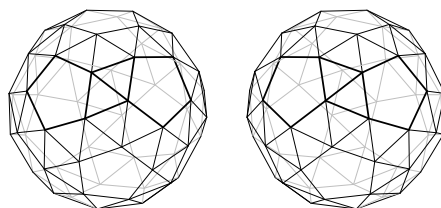


Abbildung 41: Die beiden Isomere $S_{12}^{[r]}$ und $S_{12}^{[l]}$ des Schrägen Dodekaeders

Auch hier liegt die Schwierigkeit darin, den Winkel α und die Kantenlänge k des Schrägen Dodekaeders zu bestimmen.

Den Versuch, die Koordinaten der Eckpunkte rein algebraisch zu ermitteln, stelle ich hier aus denselben Gründen wie beim Schrägen Hexaeder zurück und versuche es stattdessen auch hier mit einem Programm (ab Seite 85), um die Werte für k und α und damit die Koordinaten der fünf neuen Eckpunkte relativ zu den Ecken eines 5-Ecks des Dodekaeders zu bestimmen.

Als erstes bestimme ich die Koordinaten der Eckpunkte dreier 5-Ecken, welche um eine Ecke des Dodekaeders gruppiert sind, und deren Flächenmittelpunkte. Dann bestimme ich mit Hilfe der Flächenlote auf den drei Mittelpunk-

ten drei Rotationsmatrizen R_i , $i = 1, 2, 3$ (je eine für ein 5-Eck). Die m_i seien die Flächenmittelpunkte:

$$\begin{array}{lll} 1. \text{ Fläche:} & a_1 = (0; e; 1 + e), & a_2 = (0; -e; 1 + e), & a_3 = (1; -1; 1), \\ & a_4 = (1 + e; 0; e), & a_5 = (1; 1; 1) & m_1 = \left(\frac{3+e}{5}; 0; \frac{4+3e}{5}\right) \\ 2. \text{ Fläche:} & a_1 = (0; e; 1 + e), & a_2 = (0; -e; 1 + e), & a_6 = (-1; -1; 1), \\ & a_7 = (-1 - e; 0; e), & a_8 = (-1; 1; 1) & m_2 = \left(\frac{-3-e}{5}; 0; \frac{4+3e}{5}\right) \\ 3. \text{ Fläche:} & a_1 = (0; e; 1 + e), & a_8 = (-1; 1; 1), & a_9 = (-e; 1 + e; 0), \\ & a_{10} = (e, 1 + e; 0), & a_5 = (1; 1; 1) & m_3 = \left(0; \frac{4+3e}{5}; \frac{3+e}{5}\right) \end{array}$$

Die Normalenvektoren der Flächen sind dann: $n_1 = \frac{m_1}{\|m_1\|}$, $n_2 = \frac{m_2}{\|m_2\|}$ und $n_3 = \frac{m_3}{\|m_3\|}$. Zuerst wird für die 1. Fläche die Rotationsmatrix M bestimmt, die n_1 auf den Vektor $(1; 0; 0)$ dreht. Diese ist gegeben durch

$$M = \begin{vmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{vmatrix} \text{ mit } \cos \beta = \frac{3+e}{5\|m_1\|} \text{ und } \sin \beta = \frac{4+3e}{5\|m_1\|}$$

Dann kann in der yz -Ebene um den Winkel α gedreht werden mit der Matrix $N(\alpha)$:

$$N(\alpha) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Und schließlich mit M^{-1} , der inversen Matrix von M , zurück gedreht werden auf die 1. Fläche:

$$M^{-1} = \begin{vmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{vmatrix} \text{ mit } \cos \beta \text{ und } \sin \beta \text{ wie oben .}$$

Also ist unsere Rotationsmatrix $R_1(\alpha) = M^{-1}N(\alpha)M$:

$$R_1(\alpha) = \begin{vmatrix} \cos^2 \beta \cos \alpha + \sin^2 \beta & -\cos \beta \sin \alpha & \sin \beta \cos \beta - \sin \beta \cos \beta \cos \alpha \\ \cos \beta \sin \alpha & \cos \alpha & -\sin \beta \sin \alpha \\ \sin \beta \cos \beta - \sin \beta \cos \beta \cos \alpha & \sin \beta \sin \alpha & \sin^2 \beta \cos \alpha + \cos^2 \beta \end{vmatrix}$$

Auch n_2 der 2. Fläche wird auf den Vektor $(1; 0; 0)$ gedreht, dann um α rotiert und wieder zurück gedreht. Also ist $R_2(\alpha)$ mit $\cos \beta' = -\frac{3+e}{5\|m_1\|}$ und $\sin \beta' = \sin \beta$:

$$R_2(\alpha) = \begin{vmatrix} \cos^2 \beta' \cos \alpha + \sin^2 \beta' & -\cos \beta' \sin \alpha & \sin \beta' \cos \beta' - \sin \beta' \cos \beta' \cos \alpha \\ \cos \beta' \sin \alpha & \cos \alpha & -\sin \beta' \sin \alpha \\ \sin \beta' \cos \beta' - \sin \beta' \cos \beta' \cos \alpha & \sin \beta' \sin \alpha & \sin^2 \beta' \cos \alpha + \cos^2 \beta' \end{vmatrix}$$

Das Lot der 3. Fläche wird auf den Vektor $(0; 0; 1)$ gedreht, dann um α rotiert und wieder zurück gedreht. Mit $\cos \beta'' = \frac{3+e}{5\|m_3\|} = \frac{3+e}{5\|m_1\|}$ und $\sin \beta'' = \frac{4+3e}{5\|m_1\|}$ ist

$R_3(\alpha)$ also:

$$R_3(\alpha) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta'' \sin \alpha & \sin \beta'' \sin \alpha \\ \cos \beta'' \sin \alpha & \cos^2 \beta'' \cos \alpha + \sin^2 \beta'' & \sin \beta'' \cos \beta'' - \sin \beta'' \cos \beta'' \cos \alpha \\ \sin \beta'' \sin \alpha & \sin \beta'' \cos \beta'' - \sin \beta'' \cos \beta'' \cos \alpha & \sin^2 \beta'' \cos \alpha + \cos^2 \beta'' \end{vmatrix}$$

Für ein gegebenes k lasse ich jetzt ein Programm die neuen Koordinaten der zentralorientierten und planar auf den drei Dodekaeder-5-Ecken liegenden kleineren 5-Ecke mit Kantenlänge k berechnen. Für $\alpha = 0^\circ$ sieht dieser Polyeder dem Romben-Ikosi-Dodekaeder ähnlich, wobei dessen Quadrate hier zwei koplanaare gleichschenklige, rechtwinklige 3-Ecke sind. Mit wachsendem α verlieren diese 3-Ecke nun ihre Koplplanarität und Rechtwinkligkeit und die Längen a der Hypothenusen und b der Schenkel nähern sich zusehends. Sind $a = b$, dann nähere ich k an diesen Wert. Auf diese Art und Weise nähern sich a , b und k bis schließlich $a = b = k$ sind mit beliebiger Genauigkeit.

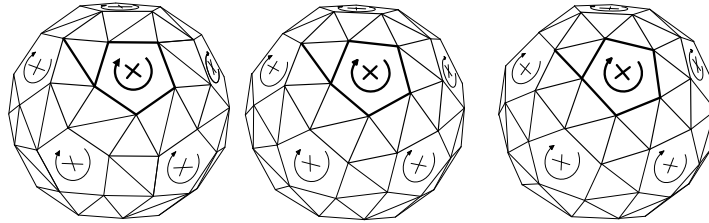


Abbildung 42: Programmprinzip zur Berechnung des Schrägen Dodekaeders (Verdrehung aller 5-Ecke zur Verkürzung der langen 3-Eck-Seiten)

Näherungswerte sind: $k = 0,6948209602$ bei $\alpha = 13,1064033769^\circ$.

Um die Koordinaten aller Eckpunkte des Schrägen Dodekaeders zu berechnen, bestimme ich nun die Koordinaten der zehn Eckpunkte, die auf den 5-Ecken der drei Dodekaeder-5-Ecken von oben liegen, deren gemeinsame Kante parallel zur x -Achse liegt (1. und 2. Fläche). Dazu nehme ich die Flächenmittelpunkte und setze auf den Kreisen der 5-Eck-Ebenen mit den Radien $r = \frac{k}{2}\sqrt{1 + \cot^2(36^\circ)}$ bei den Winkeln α , $\alpha + 72^\circ$, $\alpha + 144^\circ$, $\alpha + 216^\circ$ und $\alpha + 288^\circ$ einen Punkt, wobei der Winkel 0° senkrecht auf die Verbindungskante der beiden 5-Ecke zeigt (dies ist die zur x -Achse parallele).

$$\begin{aligned} & p_1 = (0, 2604339444; -0, 2299308641; 1, 4570769593) \\ & p_2 = (0, 3944605381; 0, 4467904482; 1, 3742439689) \\ \text{5-Eck der 1. Fläche: } & p_3 = (0, 9833560754; 0, 5060625470; 1, 0102865111) \\ & p_4 = (1, 2132869395; -0, 1340265937; 0, 8681814220) \\ & p_5 = (0, 7664964913; -0, 5888955373; 1, 1443131048) \\ & p_1 = (-0, 2604339444; 0, 2299308641; 1, 4570769593) \\ & p_2 = (-0, 3944605381; -0, 4467904482; 1, 3742439690) \\ \text{5-Eck der 2. Fläche: } & p_3 = (-0, 9833560754; -0, 5060625470; 1, 0102865111) \\ & p_4 = (-1, 2132869395; 0, 1340265937; 0, 8681814220) \\ & p_5 = (-0, 7664964913; 0, 5888955373; 1, 1443131048) \end{aligned}$$

Durch Ausnutzung der Symmetrien des Dodekaeders bzw. Hexaeders erhalten wir dann die Koordinaten aller Eckpunkte:

$f; -g; h$	$k; m; n$	$p; q; r$	$s; -t; u$	$v; -w; x$
$-f; g; h$	$-k; -m; n$	$-p; -q; r$	$-s; t; u$	$-v; w; x$
$-f; -g; -h$	$-k; m; -n$	$-p; q; -r$	$-s; -t; -u$	$-v; -w; -x$
$f; g; -h$	$k; -m; -n$	$p; -q; -r$	$s; t; -u$	$v; w; -x$
$h; f; -g$	$n; k; m$	$r; p; q$	$u; s; -t$	$x; v; -w$
$h; -f; g$	$n; -k; -m$	$r; -p; -q$	$u; -s; t$	$x; -v; w$
$-h; -f; -g$	$-n; -k; m$	$-r; -p; q$	$-u; -s; -t$	$-x; -v; -w$
$-h; f; g$	$-n; k; -m$	$-r; p; -q$	$-u; s; t$	$-x; v; w$
$-g; h; f$	$m; n; k$	$q; r; p$	$-t; u; s$	$-w; x; v$
$g; h; -f$	$-m; n; -k$	$-q; r; -p$	$t; u; -s$	$w; x; -v$
$-g; -h; -f$	$m; -n; -k$	$q; -r; -p$	$-t; -u; -s$	$-w; -x; -v$
$g; -h; f$	$-m; -n; k$	$-q; -r; p$	$t; -u; s$	$w; -x; v$

mit $f = 0,2604339444$ $g = 0,2299308641$ $h = 1,4570769593$

$k = 0,3944605381$ $m = 0,4467904482$ $n = 1,3742439690$

$p = 0,9833560754$ $q = 0,5060625470$ $r = 1,0102865111$

$s = 1,2132869395$ $t = 0,1340265937$ $u = 0,8681814220$

$v = 0,7664964913$ $w = 0,5888955373$ $x = 1,1443131048$

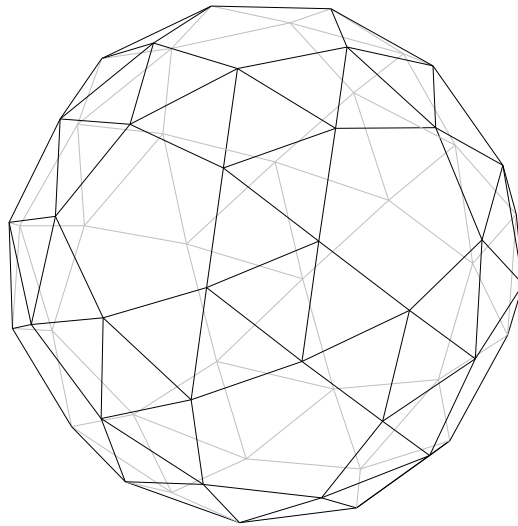


Abbildung 43: (rechter) Schräger Dodekaeder

Auch hier müssen die Vektoren aller Ecken die gleiche Länge haben, damit sie auf einer Sphäre liegen:

$$\begin{aligned}\sqrt{f^2 + g^2 + h^2} &= 1,497920995 \\ \sqrt{k^2 + m^2 + n^2} &= 1,497920995 \\ \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} &= 1,497920995 \\ \sqrt{s^2 + t^2 + u^2} &= 1,497920994 \\ \sqrt{v^2 + w^2 + x^2} &= 1,497920994 .\end{aligned}$$

Der Schräge Dodekaeder besteht aus zwölf 5-Ecken, achtzig 3-Ecken, hundertfünfzig Kanten und sechzig Ecken und die Kantenlänge k .

Sechs 5-Symmetrien auf den 5-Ecken und zehn 3-Symmetrien auf den 3-Ecken, die nur mit anderen 3-Ecken gemeinsame Kanten haben (Spitzen-3-Ecke), sind die einzigen Symmetrien, die wir finden können. Diese Symmetrien stammen vom Dodekaeder und vom Ikosaeder, in die der Schräge Dodekaeder so hinein paßt, daß die 5-Ecke auf den Flächen des Dodekaeders bzw. die oben genannten 3-Ecke auf den Flächen des Ikosaeders liegen.

4.20 Übersicht

Im Folgenden möchte ich, genau wie bei den Platonischen Polyedern, eine Gesamtübersicht über die Archimedischen Polyedern und ihre Symmetrien geben. Dadurch können wir weitere Gemeinschaften zwischen ihnen erkennen.

In der oberen Zeile stehen F, K und E für Anzahl der Flächen (und Typ), Anzahl der Kanten bzw. Anzahl der Ecken. In der Symmetrienspalte sind alle Symmetrien des Polyeders angegeben, wobei 4er für 4-Symmetrie steht. So heißt z.B. „4 3er auf 3-Ecken“, daß wir vier 3-Symmetrien auf den 3-Ecken finden. „auf K“ heißt auf den Kanten; E steht wie oben für Ecken. In der linken Spalte sind die Archimedischen Polyeder mit ihren Kurzschreibweisen angegeben, wobei nicht auf die Teilbarkeit (z.B. $C_8=(C_3+C_3)_{[reg]}$) der Polyeder eingegangen wird.

Wie wir sehen sind der Stumpfe Hexaeder (TP_6) und der Stumpfe Oktaeder (TP_8) sehr eng verwandt genauso, wie der Stumpfe Dodekaeder (TP_{12}) und der Stumpfe Ikosaeder (TP_{20}) – man beachte den Austausch von 3- und 6-Ecken, 4- und 8-Ecken bzw. 5- und 10-Ecken und das Auftreten halbvollständiger Symmetrien auf den großen Flächen (6-, 8- und 10-Ecke besitzen nur 3-, 4- bzw. 5-Symmetrien).

Desweiteren gibt es zwei aufsteigende Ketten, was sehr gut in den Anzahlen der Kanten und Ecken zu erkennen ist (Beachte $C_8-RC_8-gRC_8$ und $I_{12}-RI_{12}-gRI_{12}$). Bei den Kanten wird pro Kettenglied die Anzahl der Kanten des ersten Kettengliedes dazu addiert. Bei den Ecken verdoppelt sich die Anzahl bei jedem höheren Glied. Pro Kette finden wir bei allen Gliedern die gleichen Symmetrien.

	F	K	E	Symmetrien
TP ₄	4 3-Ecke 4 6-Ecke	18	12	4 3er auf F 3 2er auf K zw. 6-Ecke
S ₆	32 3-Ecke 6 4-Ecke	60	24	4 3er auf (Spitzen-)3-Ecke 6 4er auf 4-Ecke
TP ₆	8 3-Ecke 6 8-Ecke	36	24	4 3er auf 3-Ecke 6 2er auf K zw. 8-Ecke 6 4er auf 8-Ecke
TP ₈	8 6-Ecke 6 4-Ecke	36	24	4 3er auf 6-Ecke 6 2er auf K zw. 6-Ecke 3 4er auf 4-Ecke
C ₈	8 3-Ecke 6 4-Ecke	24	12	4 3er auf 3-Ecke 6 2er auf E 3 4er auf 4-Ecke
RC ₈	8 3-Ecke 18 4-Ecke	48	24	4 3er auf 3-Ecke 6 2er auf 4-Ecke 3 4er auf 4-Ecke
gRC ₈	8 6-Ecke 6 8-Ecke 12 4-Ecke	72	48	4 3er auf 6-Ecke 6 2er auf 4-Ecke 3 4er auf 8-Ecke
S ₁₂	80 3-Ecke 12 5-Ecke	150	60	6 5er auf 5-Ecke 10 3er auf (Spitzen-)3-Ecke
TP ₁₂	20 3-Ecke 12 10-Ecke	90	60	6 5er auf 10-Ecke 15 2er auf K zw. 10-Ecke 10 3er auf 3-Ecke
TP ₂₀	20 6-Ecke 12 5-Ecke	90	60	6 5er auf 5-Ecke 15 2er auf K zw. 6-Ecke 10 3er auf 6-Ecke
I ₁₂	20 3-Ecke 12 5-Ecke	60	30	6 5er auf 5-Ecke 15 2er auf E 10 3er auf 3-Ecke
RI ₁₂	20 3-Ecke 12 5-Ecke 30 3-Ecke	120	60	6 5er auf 5-Ecke 15 2er auf 4-Ecke 10 3er auf 3-Ecke
gRI ₁₂	20 6-Ecke 12 10-Ecke 30 4-Ecke	180	120	6 5er auf 10-Ecke 15 2er auf 4-Ecke 10 3er auf 6-Ecke

Weitere Analogien finden wir zwischen den korrespondierenden Gliedern beider Ketten. So haben als einzige Archimedische Polyeder der Kubo-Oktaeder und der Ikosi-Dodekaeder Eck-Symmetrien. Der Romben-Kubo-Oktaeder und der Romben-Ikosi-Dodekaeder (jeweils normal und groß) haben als einzige 2-Symmetrien auf Flächen. Und von den normalen zu den großen bleiben alle Symmetrien gleich, wobei die Kantenanzahl der Flächen, auf denen diese Symmetrien auftreten (bis auf die 2-Symmetrien), verdoppelt werden (3-Eck wird zu 6-Eck; 4-Eck zu 8-Eck und 5-Eck zu 10-Eck).

Außerdem existieren noch zwei andere große Unterfamilien: die einen basieren mehr auf den Hexaeder/Oktaeder (S₆, TP₆, TP₈, C₈, RC₈, gRC₈), die anderen mehr auf den Dodekaeder/Ikosaeder (S₁₂, TP₁₂, TP₂₀, I₁₂, RI₁₂, gRI₁₂).

In diesen Unterfamilien treten (fast) gleiche Symmetrien auf und bei den Anzahlen der verschiedenen Flächen können wir auch Regelmäßigkeiten erkennen.

Einziger Außenseiter bei den Archimedischen Polyedern ist der Stumpfe Tetraeder (TP_4), der hier die gleiche Rolle spielt wie der Tetraeder (P_4) bei den Platonischen Polyedern. Wie zusehen sind die vier 3-Symmetrien auf den Flächen, genauer auf beiden Typen, den 3-Ecken und 6-Ecken, zu finden. Also existieren eigentlich vier 3-Symmetrien auf den 3-Ecken und (die gleichen) vier 3-Symmetrien auf den 6-Ecken. Dieses könnten wir – in Analogie zum Tetraeder – bezeichnen als Mit-Sich-Selbst-Am-Nächsten-Verwandt. Aber trotz seiner Außenseiterrolle haben alle anderen Archimedischen Polyeder seine drei 2-Symmetrien auch; sie treten verdoppelt bei den Hexaeder/Oktaeder-Ähnlichen und verfünffacht bei den Dodekaeder/Ikosaeder-Ähnlichen auf.

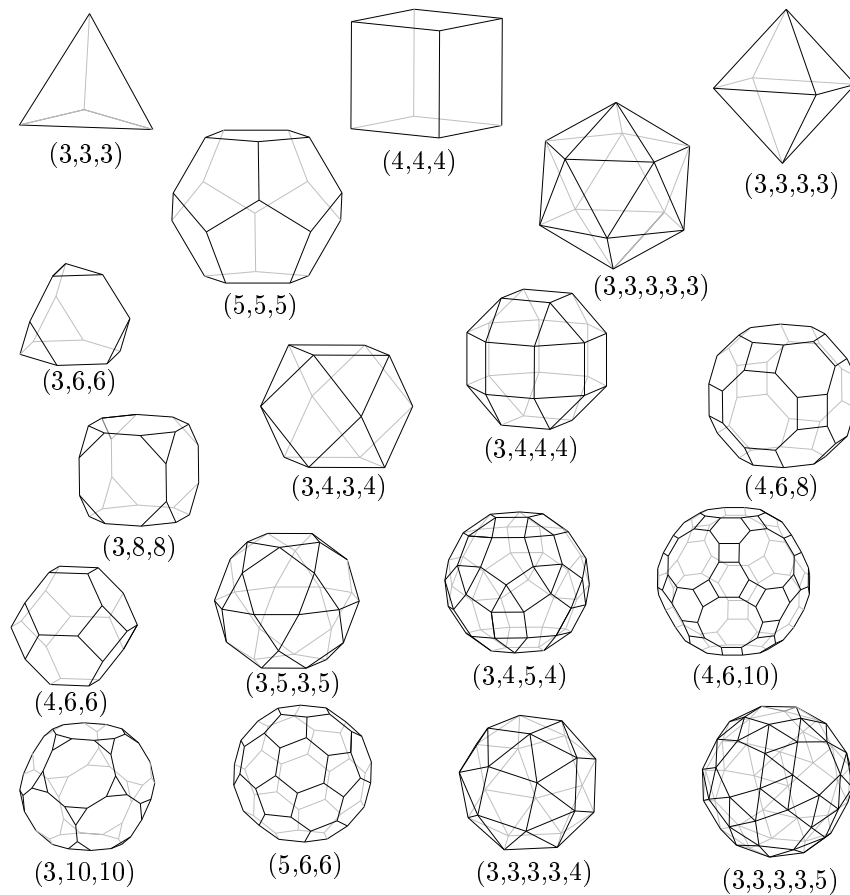


Abbildung 44: Die Platonischen und Archimedischen Polyeder (mit Eck-Konfigurationen)

Abbildung 45: Foto einiger Papiermodelle; oben Archimedische und Platonische Polyeder, unten andere halbregelmäßige (Modelle mit Bauschaum befüllt)

Abbildung 46: Polyeder in Biologie, Mineralogie, etc.

5 Bauanleitungen

„Mathematik ist die Kunst, Rechnungen zu vermeiden.“

Folklore

„felix qui potuit rerum cognoscere causas.“ (Glücklich, wer den Grund der Dinge erkennen konnte.)

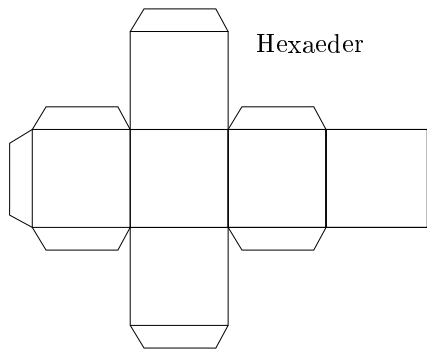
Vergil

5.1 Allgemeines

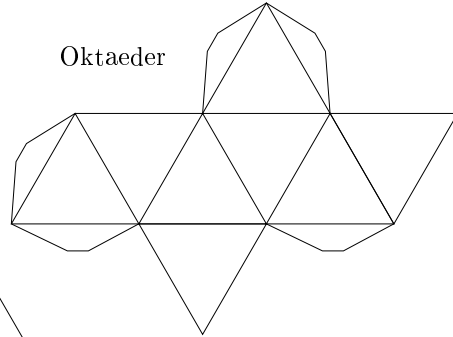
Die folgenden „Schnittmuster“ der Platonischen und Archimedischen Polyeder basieren auf sogenannte Abwicklungen. Darunter hat man sich folgendes vorzustellen: Wir schneiden alle bis auf eine Kante einer Fläche auf und klappen diese hoch und können in den Polyeder hinein schauen. Von den Kanten, die jetzt am Schnitt enden, trennen wir möglichst wenige auf, sodaß weitere Flächen abklappbar sind aber nicht vollständig getrennt werden. Zum Schluß entsteht ein mehr oder weniger fächerförmiges, zusammenhängendes Gerüst, eine Abwicklung. Diese können wir wieder zum Polyeder „aufwickeln“, indem wir alle Kanten nach oben knicken und, angefangen bei den tiefsten, alle Kanten wieder zusammen kleben.

Um die Polyeder aus den Abwicklungen zu bauen, sollte erst einmal darüber nachgedacht werden, an welchen (geschnittenen) Kanten Klebelaschen nötig sind und an welchen nicht. Wer sich nicht sicher ist, sollte überall Laschen lassen und diese nach innen geknickt dort zusammen kleben.

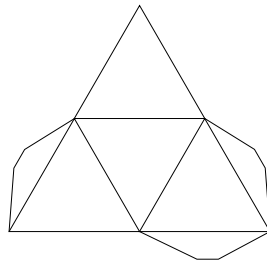
Nach diesen Vorüberlegungen kann die Abwicklung sauber ausgeschnitten werden. Vor dem Kleben empfehle ich ein Vorfalten aller Kanten, auch der Laschen. Dann bewegt sich die Abwicklung meist schon von alleine in die Polyederform. Und als letzte Fläche sollte man immer eine aufkleben, die keine Laschen besitzt.



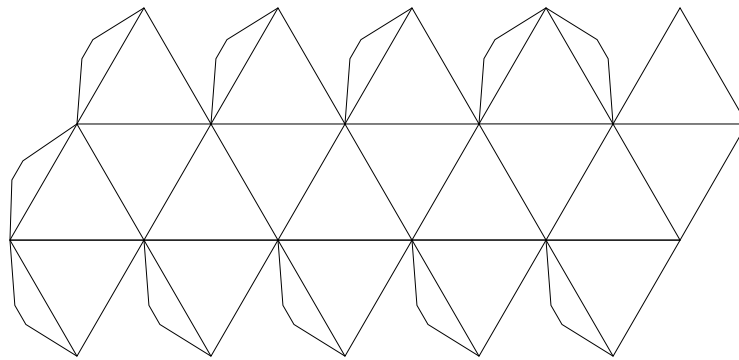
Hexaeder



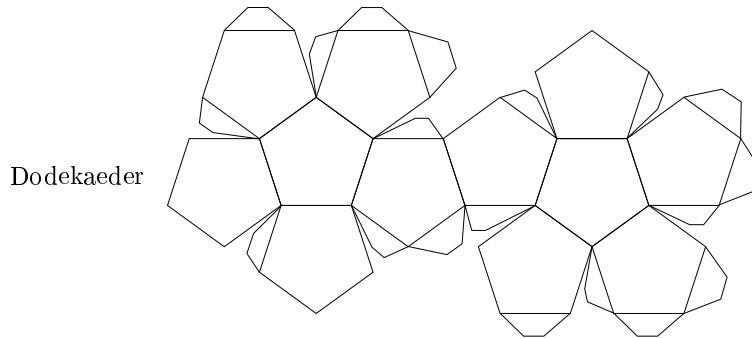
Oktaeder



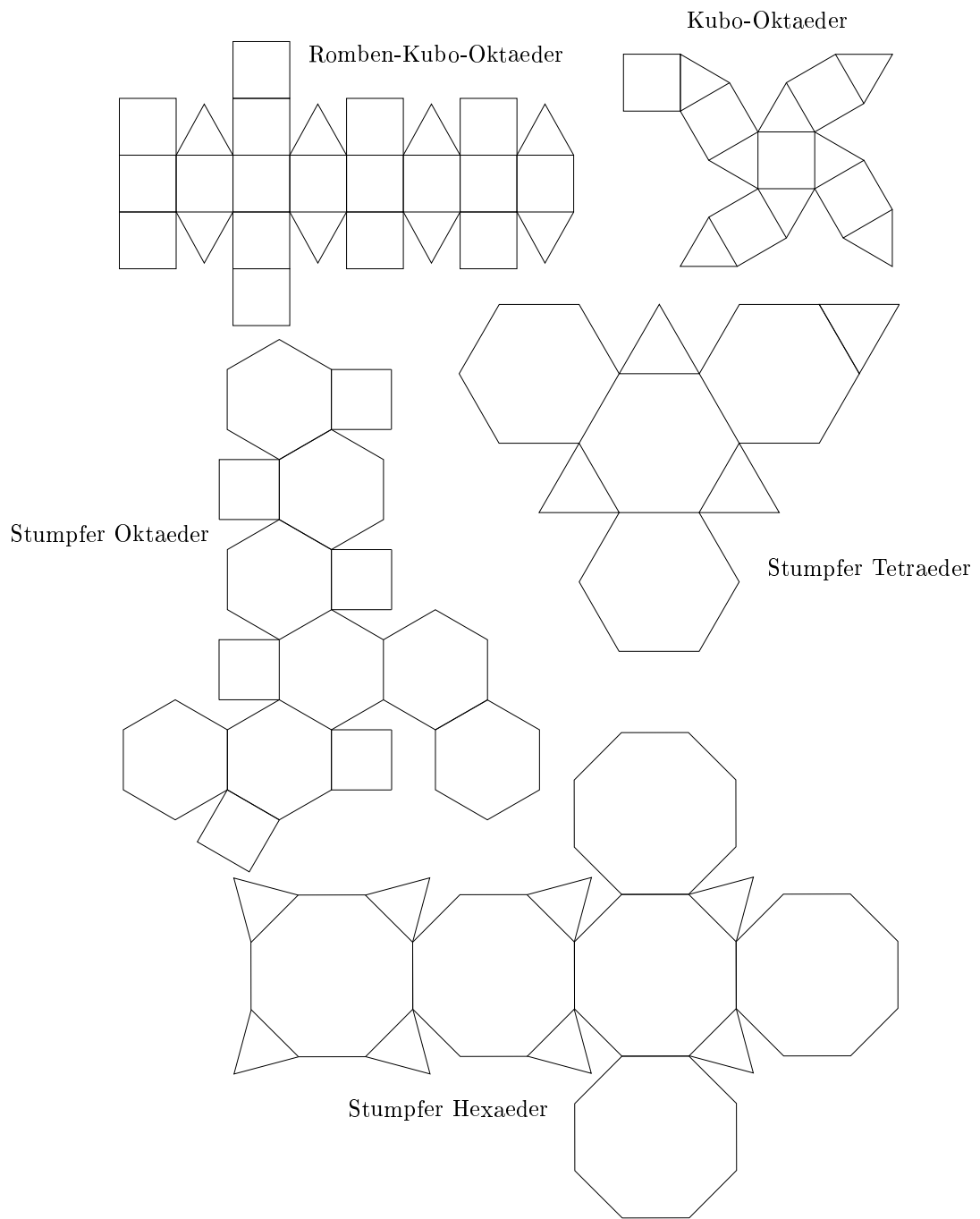
Tetraeder



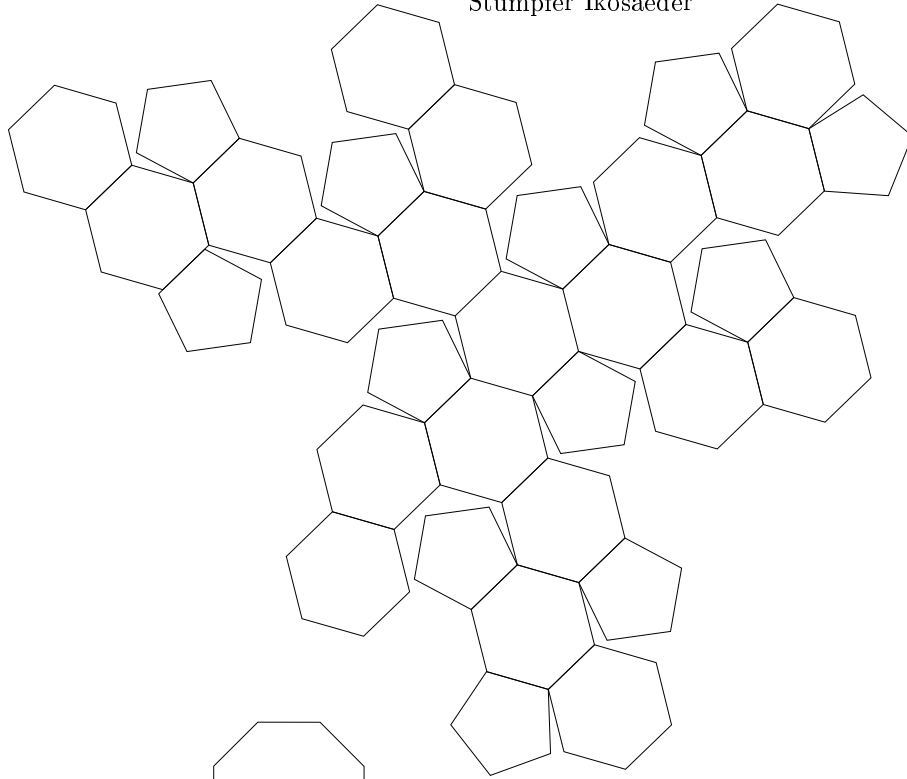
Ikosaeder



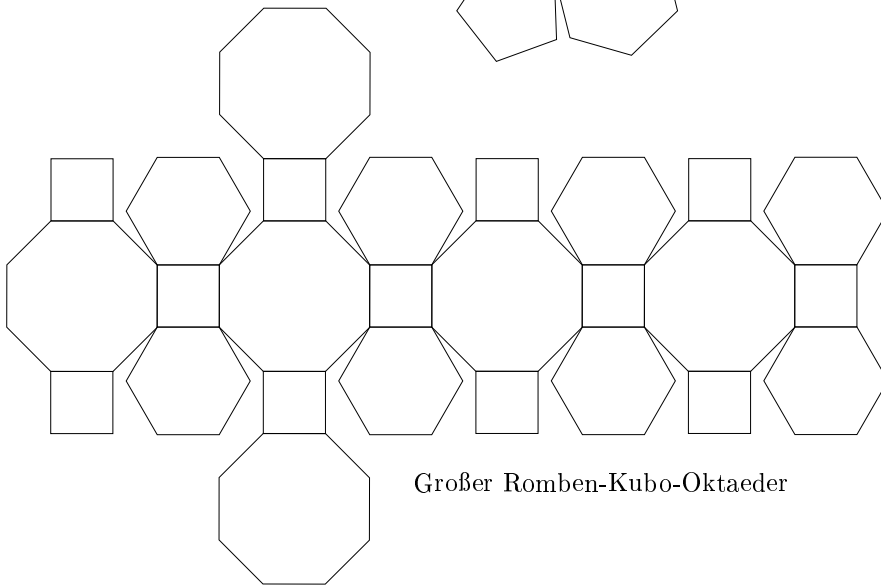
Dodekaeder

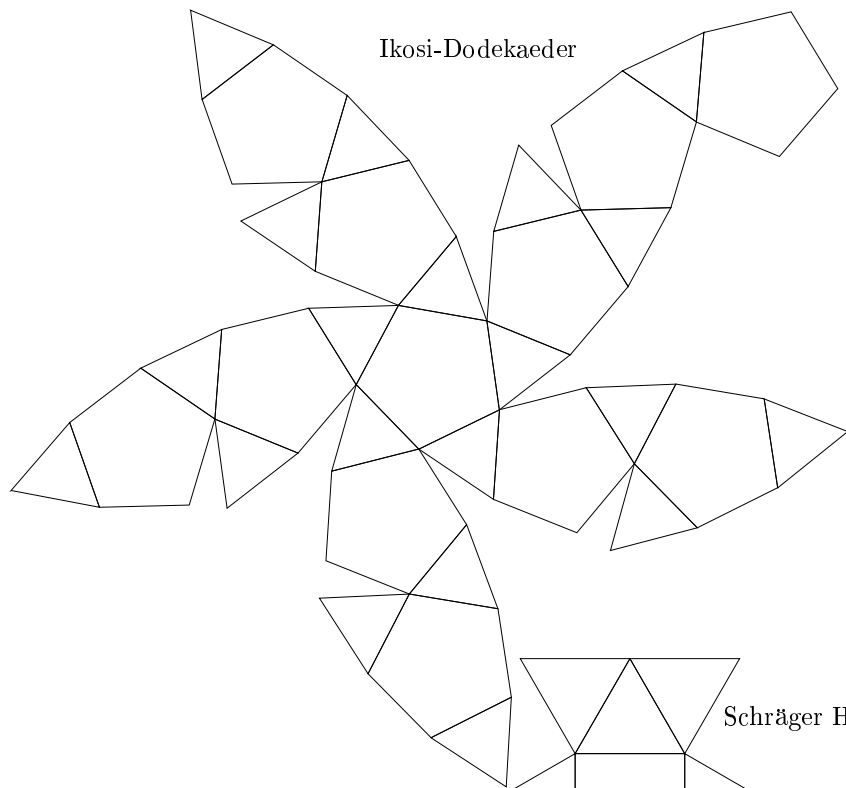


Stumpfer Ikosaeder

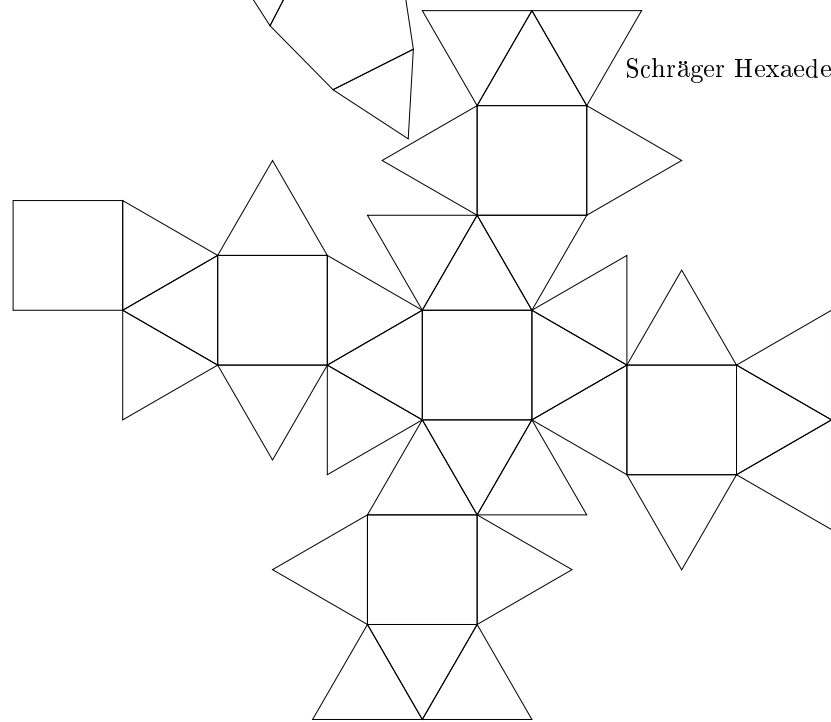


Großer Romben-Kubo-Oktaeder



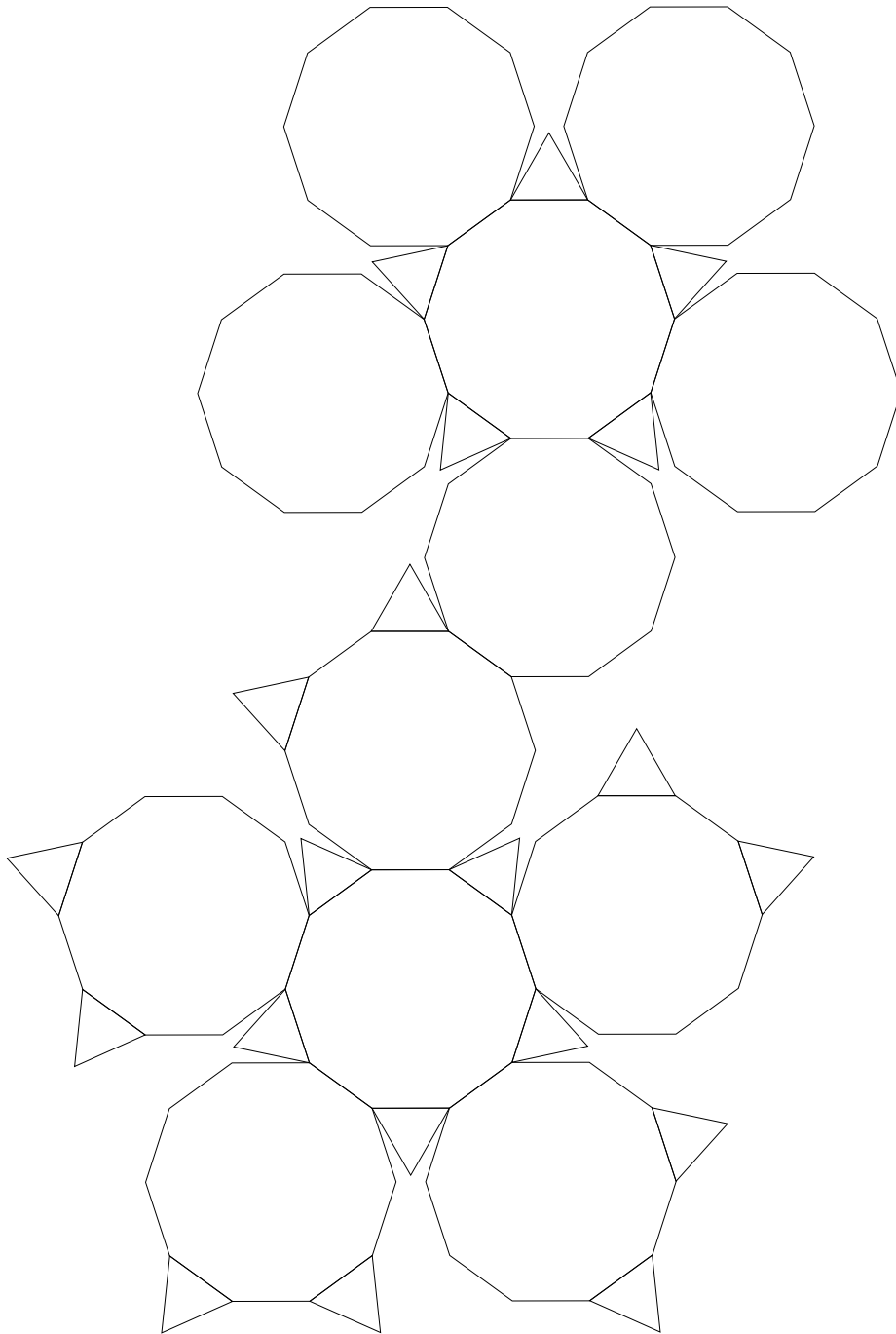


Ikosi-Dodekaeder

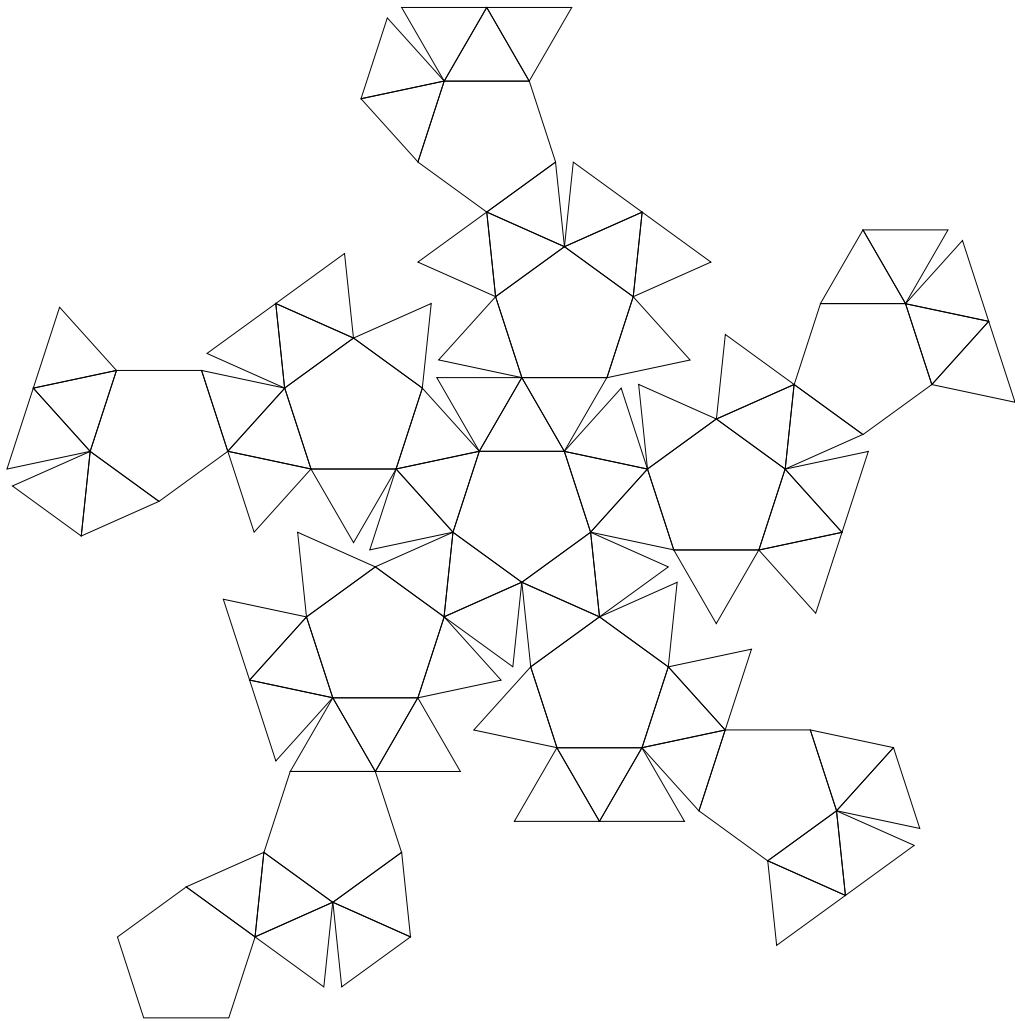


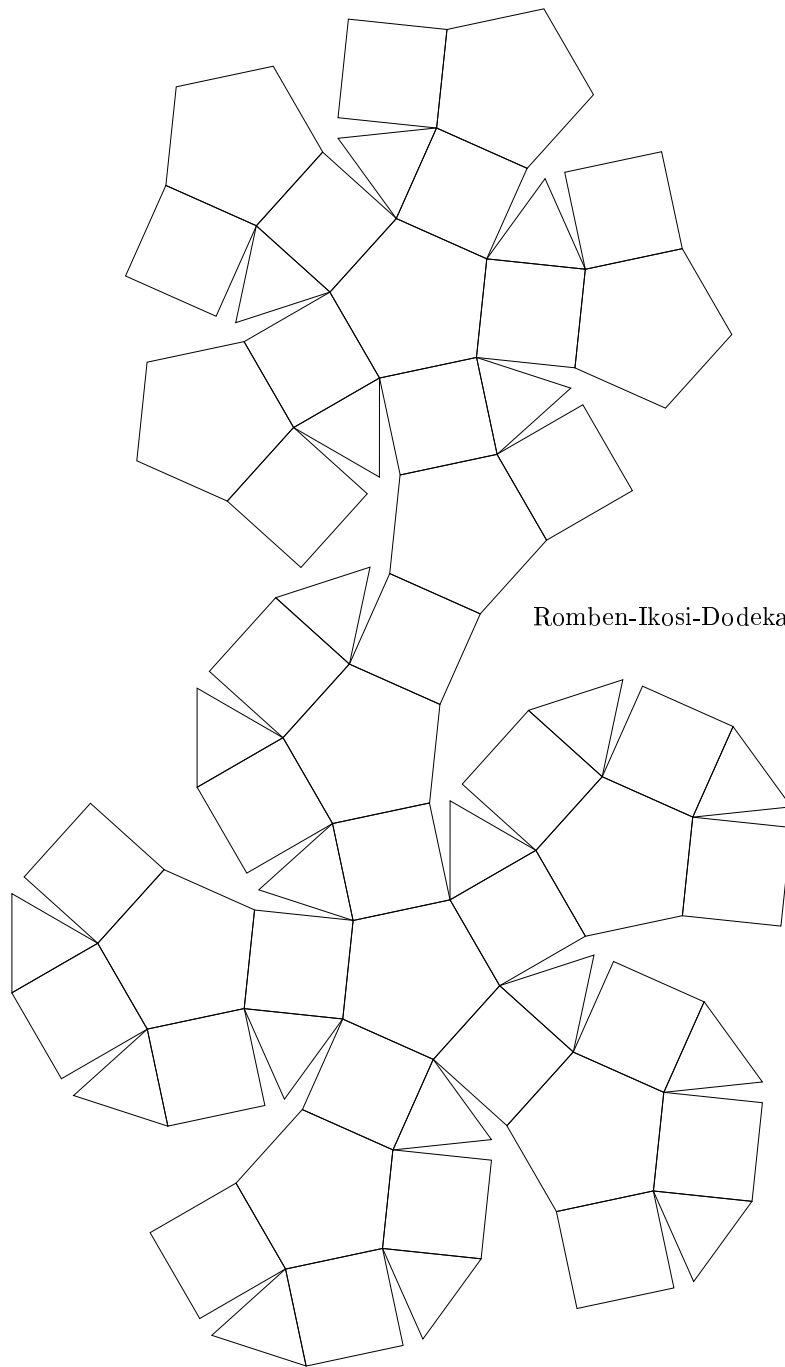
Schräger Hexaeder

Stumpfer Dodekaeder

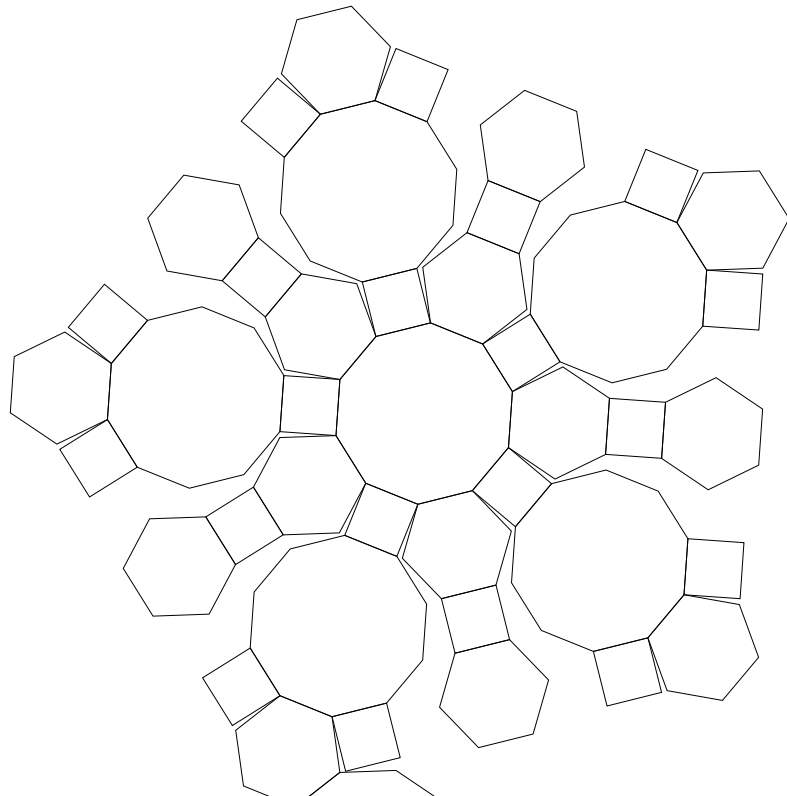


Schräger Dodekaeder

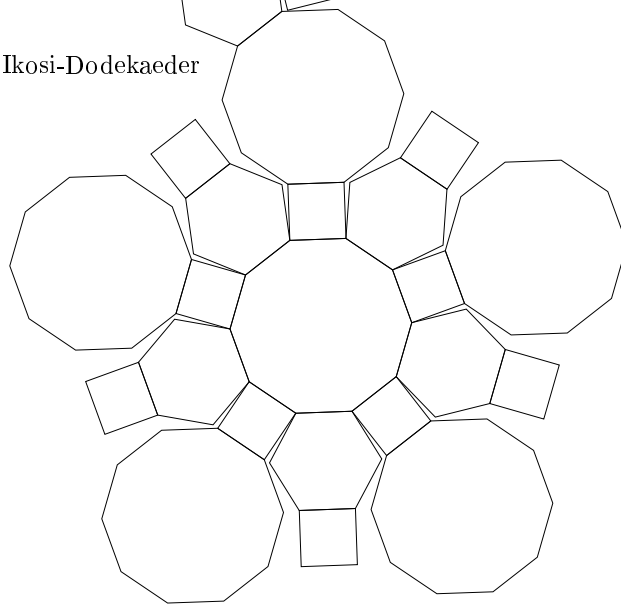




Romben-Ikosi-Dodekaeder



Großer Romben-Ikosi-Dodekaeder



A Die Programme

„Der Mensch schafft nur Chaos.“

Stephen W. Hawkins

Die folgenden Programme, in Turbo Pascal geschrieben, wurden als Hilfe bei den Berechnungen der Koordinaten der Polyeder benutzt. Dabei basiert das erste Programm auf den Seitenkosinus- und Winkelkosinussatz und vereinfacht nur deren Benutzung.

Das zweite und dritte Programm sind im Aufbau identisch. Beide habe ich benutzt zur Bestimmung von Drehwinkel und Kantenlänge bei den Schrägen Archimedischen Polyedern. Dabei habe ich mich sukzessiv an die richtigen Werte angenähert, d.h. das Programm muß mit den neuen Werten immer wieder gestartet werden, bis eine hinreichende Genauigkeit erreicht ist.

Das letzte Programm hat den Zweck, die per Hand ausgerechneten 3-dimensionalen Koordinaten so zu drehen, daß die Projektion gut aussieht, und die 2-dimensionalen Projektionskoordinaten auszugeben bzw. als EPS-File (**E**ncapsulated **P**ost-**S**cript) zu speichern. Außerdem läßt sich damit auch überprüfen, ob die Kantenlängen des gezeichneten Polyeders auch alle die richtige Länge haben.

A.1 zum Seitenkosinus- und Winkelkosinussatz

Dieses Programm berechnet für eine Ecke, an die drei regelmäßige Flächen stoßen, aus deren Typ die dihedralen Winkel, also die Winkel zwischen den Flächen (siehe auch Fußnote 6 auf Seite 50) und umgekehrt. Eingegeben werden müssen drei Daten der Ecke, also Flächen-Typen (z.B. 3-Eck oder 5-Eck) oder dihedrale Winkel. Mit den Formeln aus Fußnote 7 und 8 (auf den Seiten 55 bzw. 58) können dann die jeweils anderen Daten berechnet werden.

```
program Spheric1; {Programm zur Berechnung der Flaechen-
und Dihedralwinkel eines (3-dim.) Polyeders.
Genauer: Winkel um eine Ecke, an der genau
drei Flaechen grenzen.}

type genauigkeit =real; {bei real g1=12 g2=9 }

const g1=12;
      g2=9;

var text :string;
    test :integer;
    a,b,c :genauigkeit; {Seiten =Flaechenwinkel}
    r,s,t :genauigkeit; {winkel =Dihedralwinkel}
    i,j :integer;
    ende :boolean;

function acs (x:genauigkeit):genauigkeit;
begin
if (x>1) and (x<1) then acs:=pi/2-arctan(x/sqrt(1-x*x));
if x=-1 then acs:=pi;
if x=1 then acs:=0;
if (x<-1)or(x>1) then acs:=-9999;
end;

begin
ende:=false;
```

```

writeln('Dieses Programm berechnet die Flaechen- u. Dihedralwinkel um eine Ecke eines');
writeln('3-dimensionalen Polyeders.Dabei muessen an der Ecke genau drei Flaechen an- ');
writeln('einandergrenzen. Gerechnet wird mit der sphaerischen Trigonometrie auf der ');
writeln('Einheitskugel mit Radius 1. Hierbei wird um die Ecke des Polyeders eine ');
writeln('Einheitskugel gezogen und die Schnittlinien der Kugel mit den drei Flaechen ');
writeln('betrachtet: In diesem sphaerischem 3-Eck korrespondieren die Flaechenwinkel ');
writeln('das sind die Winkel der Flchen an der Ecke - mit den Seitenlaengen des ');
writeln('3-Ecks und die Dihedralwinkel - das sind die Winkel zwischen zwei Flaechen ');
writeln('mit den Eckwinkeln des 3-Ecks. ');
writeln('Es muessen drei Winkel angegeben werden. Daraus werden die anderen drei er- ');
writeln('rechnet. ');
writeln('Zur Eingabe:Die Flaechenwinkel heissen a,b,c,die Dihedralwinkel r,s,t.Einge- ');
writeln('geben wird "a...." in Grad oder "a..eck", wobei .. eine ganze Zahl ist ');
writeln('und die Flaechen beschreibt (z.B. 10eck == 144 Grad).');
writeln('Zum Abbruch einfach dreimal nur Enter eingeben. ');
writeln;
repeat
a:=0;b:=0;c:=0;r:=0;s:=0;t:=0;
for i:=1 to 5 do
begin
write(i:1,'. Winkel:');readln(text);
if text='' then ende:=true;
case text[1] of
'a' :begin
text:=copy(text,3,length(text)-2);
if copy(text,length(text)-2,3)='eck' then
begin
val(copy(text,1,length(text)-3),a,test);
if a<>0 then a:=180*(a-2)/a;
end else
val(text,a,test);
writeln(' a',a:gi:g2,' grad');
end;
'b' :begin
text:=copy(text,3,length(text)-2);
if copy(text,length(text)-2,3)='eck' then
begin
val(copy(text,1,length(text)-3),b,test);
if b<>0 then b:=180*(b-2)/b;
end else
val(text,b,test);
writeln(' b',b:gi:g2,' grad');
end;
'c' :begin
text:=copy(text,3,length(text)-2);
if copy(text,length(text)-2,3)='eck' then
begin
val(copy(text,1,length(text)-3),c,test);
if c<>0 then c:=180*(c-2)/c;
end else
val(text,c,test);
writeln(' c',c:gi:g2,' grad');
end;
'r' :begin
text:=copy(text,3,length(text)-2);
if copy(text,length(text)-2,3)='eck' then
begin
val(copy(text,1,length(text)-3),r,test);
if r<>0 then r:=180*(r-2)/r;
end else
val(text,r,test);
writeln(' r',r:gi:g2,' grad');
end;
's' :begin
text:=copy(text,3,length(text)-2);
if copy(text,length(text)-2,3)='eck' then
begin
val(copy(text,1,length(text)-3),s,test);
if s<>0 then s:=180*(s-2)/s;
end else
val(text,s,test);
writeln(' s',s:gi:g2,' grad');
end;
't' :begin
text:=copy(text,3,length(text)-2);
if copy(text,length(text)-2,3)='eck' then
begin
val(copy(text,1,length(text)-3),t,test);
if t<>0 then t:=180*(t-2)/t;
end else
val(text,t,test);
writeln(' t',t:gi:g2,' grad');
end;
end;
end;
writeln;
if not ende then
begin
{Umrechnung von Grad auf Radiens}

```

```

a:=a*pi/180;b:=b*pi/180;c:=c*pi/180;
r:=r*pi/180;s:=s*pi/180;t:=t*pi/180;
if (r=0)and(s=0)and(t=0) then
begin
r:=acs((cos(a)-cos(b)*cos(c))/(sin(b)*sin(c)));
s:=acs((cos(b)-cos(a)*cos(c))/(sin(a)*sin(c)));
t:=acs((cos(c)-cos(a)*cos(b))/(sin(a)*sin(b)));
r:=r/pi*180; writeln('=> r=',r:gi:2,' grad');
s:=s/pi*180; writeln('=> s=',s:gi:2,' grad');
t:=t/pi*180; writeln('=> t=',t:gi:2,' grad');
end;
if (r=0)and(s=0)and(c=0) then
begin
c:=acs(cos(t)*sin(a)*sin(b)+cos(a)*cos(b));
r:=acs((cos(a)-cos(b)*cos(c))/(sin(b)*sin(c)));
s:=acs((cos(b)-cos(a)*cos(c))/(sin(a)*sin(c)));
r:=r/pi*180; writeln('=> r=',r:gi:2,' grad');
s:=s/pi*180; writeln('=> s=',s:gi:2,' grad');
c:=c/pi*180; writeln('=> c=',c:gi:2,' grad');
end;
if (r=0)and(b=0)and(t=0) then
begin
b:=acs(cos(s)*sin(a)*sin(c)+cos(a)*cos(c));
r:=acs((cos(a)-cos(b)*cos(c))/(sin(b)*sin(c)));
s:=acs((cos(b)-cos(a)*cos(c))/(sin(a)*sin(c)));
r:=r/pi*180; writeln('=> r=',r:gi:2,' grad');
s:=s/pi*180; writeln('=> s=',s:gi:2,' grad');
b:=b/pi*180; writeln('=> b=',b:gi:2,' grad');
end;
if (a=0)and(s=0)and(t=0) then
begin
a:=acs(cos(r)*sin(b)*sin(c)+cos(b)*cos(c));
r:=acs((cos(a)-cos(b)*cos(c))/(sin(b)*sin(c)));
s:=acs((cos(b)-cos(a)*cos(c))/(sin(a)*sin(c)));
r:=r/pi*180; writeln('=> r=',r:gi:2,' grad');
s:=s/pi*180; writeln('=> s=',s:gi:2,' grad');
a:=a/pi*180; writeln('=> a=',a:gi:2,' grad');
end;
if (r=0)and(b=0)and(c=0) then
begin
r:=acs(sin(s)*sin(t)*cos(a)-cos(s)*cos(t));
b:=acs((cos(s)+cos(r)*cos(t))/(sin(r)*sin(t)));
c:=acs((cos(t)+cos(r)*cos(s))/(sin(r)*sin(s)));
r:=r/pi*180; writeln('=> r=',r:gi:2,' grad');
b:=b/pi*180; writeln('=> b=',b:gi:2,' grad');
c:=c/pi*180; writeln('=> c=',c:gi:2,' grad');
end;
if (a=0)and(s=0)and(c=0) then
begin
s:=acs(sin(r)*sin(t)*cos(b)-cos(r)*cos(t));
a:=acs((cos(r)+cos(s)*cos(t))/(sin(s)*sin(t)));
c:=acs((cos(t)+cos(r)*cos(s))/(sin(r)*sin(s)));
a:=a/pi*180; writeln('=> a=',a:gi:2,' grad');
s:=s/pi*180; writeln('=> s=',s:gi:2,' grad');
c:=c/pi*180; writeln('=> c=',c:gi:2,' grad');
end;
if (a=0)and(b=0)and(t=0) then
begin
t:=acs(sin(r)*sin(s)*cos(c)-cos(r)*cos(s));
a:=acs((cos(r)+cos(s)*cos(t))/(sin(s)*sin(t)));
b:=acs((cos(s)+cos(r)*cos(t))/(sin(r)*sin(t)));
t:=t/pi*180; writeln('=> t=',t:gi:2,' grad');
a:=a/pi*180; writeln('=> a=',a:gi:2,' grad');
b:=b/pi*180; writeln('=> b=',b:gi:2,' grad');
c:=c/pi*180; writeln('=> c=',c:gi:2,' grad');
end;
if (a=0)and(b=0)and(c=0) then
begin
a:=acs((cos(r)+cos(s)*cos(t))/(sin(s)*sin(t)));
b:=acs((cos(s)+cos(r)*cos(t))/(sin(r)*sin(t)));
c:=acs((cos(t)+cos(r)*cos(s))/(sin(r)*sin(s)));
a:=a/pi*180; writeln('=> a=',a:gi:2,' grad');
b:=b/pi*180; writeln('=> b=',b:gi:2,' grad');
c:=c/pi*180; writeln('=> c=',c:gi:2,' grad');
end;
end;
readln;
until ende;
end.

```

Dieses Programm wurde unter anderem bei der Berechnung der Koordinaten des Romben-Ikosi-Dodekaeders (Seite 54) benutzt. Dabei war nach dem Winkel zwischen einem 4-Eck und dem 10-Eck der 5-Kupola gefragt. Da dort drei Flächen aneinander stoßen, können wir dieses Programm benutzen. Nach Eingabe von a=3eck [ENTER] b=4eck [ENTER] c=10eck erhalten wir als Er-

gebnis die dihedralen Winkel $31,717474411^\circ$, $37,377368141^\circ$ und $159,094842550^\circ$. Der erste von diesen korrespondiert mit dem Winkel zwischen 4-Eck und 10-Eck.

A.2 zum Schrägen Hexaeder

Bei diesem Programm werden auf drei aneinander liegenden Hexaederflächen kleinere Quadrate der Kantenlänge k_0 um einen Winkel gedreht und die Längen der zum Schrägen Hexaeder korrespondierenden Kanten ausgegeben. Gesucht wird nun der Winkel, bei dem alle ausgegebenen Längen (etwa) gleich groß sind. Diese gleichen Längen m_0 sind meist sehr verschieden von k_0 . Nun wird als neues k_1 die Länge zwischen k_0 und m_0 genommen und wieder nach dem Winkel gesucht, bei dem alle ausgegebenen Längen gleich sind. Nun ist der Unterschied von m_1 zum (neuen) k_1 schon kleiner. Erneute Näherung von k_n an die gemeinsamen Länge m_n führt schließlich zu einer beliebig genauen Annäherung (Anpassung der Winkel-Schrittlänge Δw !) von dem vorgegebenen k_n und den ausgegebenen gleichen Längen m_n . Sind alle Längen m_n einschließlich k_n gleich lang, haben wir die Kantenlänge des Schrägen Hexaeders und den Drehwinkel der kleinen Quadrate auf den Hexaederflächen bestimmt (siehe auch die Erklärungen der Iteration auf Seite 61). Die Konstruktion der restlichen Koordinaten des Schrägen Hexaeders kann leicht durchgeführt werden.

```

program SchrxHexdr; {Programm zum Berechnen der Eckpunkte des
{$N+}              {Schrägen Hexaeders durch Intervall-
                  schachtelung um den Drehwinkel der
                  Hexaeder und um die Kantenlaenge k
                  bezogen auf den in den Einheitsvuerfel
                  [-1;1][-1;1][-1;1] eingeschriebenen
                  Schraegen Hexaeders.}

var w              :genauigkeit; {Winkel von 0 bis 45 Grad}
wr               :genauigkeit; {korresp. Winkel in Radian}
k               :genauigkeit; {Kantenlaenge von 0.5 bis 1.5}
Pa,Pb,Pc,Pd     :punkt; {Punkte des oberen 4-Ecks}
Pe,Pf           :punkt; {obere Punkte des seidl. 4-Ecks}
Pg,Ph,Pj       :punkt; {obere Punkte des vord. 4-Ecks}
i,j             :integer; {Zaehler}
da,db,dc,dd    :genauigkeit; {Entfernungen zw. Punkten}
de,df,dg,dh    :genauigkeit;
di,dj          :genauigkeit;

type             genauigkeit=extended;
punkt=array [1..3] of genauigkeit;

begin
k:=0.5;          {k:=0.8751865720019217645;}
w:=20;          {w:=28.5324395996136386;}
write ('k      ,Winkel      ');
writeln(' PdPh      , PdPe      ');
Drehen;
Laengen;
write (k:16:14,' ',w:16:14,' ');
writeln(db:16:14,' ',dc:16:14);
repeat
w:=w+0.1;      {w:=w+0.0000000000000001;};
until w>45;
readln;
end.

Drehen;
Laengen;
writeln(k:23:21,' ',w:23:21); {Ausgabe von k und w.}
writeln(da:23:21);           {Ausgabe der restlichen}
writeln(db:23:21);           {Laengen.}
writeln(dc:23:21);
writeln(dd:23:21);
write (de:23:21,' x=',Pd[2]:23:21);
writeln(' y=',Pd[1]:23:21); {Ausgabe auch von x und y.}
writeln(dh:23:21);           {Koordinaten einer Ecke des}
writeln(df:23:21);           {kleinen Quadrats auf dem}
writeln(dg:23:21);           {Hexaeder}
writeln(di:23:21);
writeln(dj:23:21);readln;
end.

procedure Drehen;
var kk :genauigkeit;
begin
kk:=k*sqrt(0.5);

```

Dieses Programm führt mit dem Startwert $k_0 = 0,5$ zu einer Folge von

Intervallen $[k, m]$, Winkel w bei Δw wie folgt:

k_i	m_i	w_i	Δw
0,5	1,074...	33,9	10^{-1}
0,787	0,9141...	29,62	10^{-2}
0,85055	0,88546...	28,828	10^{-3}
0,868005	0,878133...	28,6179	10^{-4}
0,8730690	0,8760511...	28,55759	10^{-5}
0,87456005	0,87530863...	28,53254	10^{-6}
0,87493434	0,87528936...	28,5354325	10^{-7}
0,87511185	0,8752170175...	28,53332617	10^{-8}
0,87516443375	0,8751955917...	28,53270226	10^{-9}
⋮	⋮	⋮	⋮
0.8751865720019217645	0.8751865720019217645	28.5324395996136385	10^{-16}

Da für jeden Rechenschritt die Koordinaten aus dem Winkel neu berechnet werden und keine kritischen Berechnungen wie das Subtrahieren fast gleich großer Werte vorkommen, hängt die Fehleranfälligkeit dieser Ergebnisse nur von der Genauigkeit der internen Kosinus- und Sinus-Funktionen von Turbo-Pascal ab. Diese sollten aber schon genügend stabil sein, sodaß wir von den Ergebnissen mindestens die ersten sechzehn Nachkomma-Stellen als korrekt betrachten können (Variablentyp ist extended).

A.3 zum Schrägen Dodekaeder

Dieses Programm ist im Prinzip wie das vorige Programm aufgebaut, nur kann hier nicht auf der einfach zu bestimmenden Hexaederfläche um die Koordinatensystem-Achsen gedreht werden. Hier müssen wir zuerst die drei aneinander liegenden Dodekaederflächen bestimmen, dann die Flächenmittelpunkte und schließlich, abhängig von den k_n , die kleinere 5-Ecke (mit der Kantenlänge k_n) gedreht um den Winkel w . Dann werden die Längen der zu den Kanten des Schrägen Dodekaeders korrespondierenden Kanten verglichen; bei Gleichheit ($=m_n$) wird k_n angenähert und das Programm mit den neuen Daten wieder gestartet. Zum Schluß nähern sich die k und m beliebig an. Auch hier hängt die Fehleranfälligkeit hauptsächlich von den internen Kosinus- und Sinus-Funktionen ab.

```

program Dodek1;
{$N+}

type genauigkeit =extended;
vektor =array[1..3] of genauigkeit;
vektor2d =array[1..2] of genauigkeit;

var grPent1,grPent2,
    grPent3 :array [1..5] of vektor;
    klPent1,klPent2,
    klPent3 :array [1..5] of vektor;
    Pentagon2d :array [1..5] of Vektor2d;

```

```

m1,m2,m3      :vektor;
Koord1,Koord2,
Koord3       :array [1..3] of vektor;
w,wr,e,k,f   :genauigkeit;
i            :integer;
taste       :string;
da,db,dc,dd,de,
df,dg,dh,di,dj,
dk,dl,dm,dn,dp :genauigkeit;

procedure BerechneKlPent;      {Berechnung der kleinen Pentagone}
begin
  wr:=w/180*pi;
  f:=k/2*sqrt(1+sqrt(cos(pi/5))/sqrt(sin(pi/5)));
  klPent1[1,1]:=m1[1]*Koord1[2,1]+f*cos(wr)*Koord1[3,1]+f*sin(wr);
  klPent1[1,2]:=m1[2]*Koord1[2,2]+f*cos(wr)*Koord1[3,2]+f*sin(wr);
  klPent1[1,3]:=m1[3]*Koord1[2,3]+f*cos((pi/10+wr)*Koord1[3,3]+f*sin(wr);
  klPent1[2,1]:=m1[1]*Koord1[2,1]+f*cos(pi/2+wr)*Koord1[3,1]+f*sin(pi/2+wr);
  klPent1[2,2]:=m1[2]*Koord1[2,2]+f*cos(pi/2+wr)*Koord1[3,2]+f*sin(pi/2+wr);
  klPent1[2,3]:=m1[3]*Koord1[2,3]+f*cos(pi/2+wr)*Koord1[3,3]+f*sin(pi/2+wr);
  klPent1[3,1]:=m1[1]*Koord1[2,1]+f*cos(9*pi/10+wr)*Koord1[3,1]+f*sin(9*pi/10+wr);
  klPent1[3,2]:=m1[2]*Koord1[2,2]+f*cos(9*pi/10+wr)*Koord1[3,2]+f*sin(9*pi/10+wr);
  klPent1[3,3]:=m1[3]*Koord1[2,3]+f*cos(9*pi/10+wr)*Koord1[3,3]+f*sin(9*pi/10+wr);
  klPent1[4,1]:=m1[1]*Koord1[2,1]+f*cos(13*pi/10+wr)*Koord1[3,1]+f*sin(13*pi/10+wr);
  klPent1[4,2]:=m1[2]*Koord1[2,2]+f*cos(13*pi/10+wr)*Koord1[3,2]+f*sin(13*pi/10+wr);
  klPent1[4,3]:=m1[3]*Koord1[2,3]+f*cos(13*pi/10+wr)*Koord1[3,3]+f*sin(13*pi/10+wr);
  klPent1[5,1]:=m1[1]*Koord1[2,1]+f*cos(17*pi/10+wr)*Koord1[3,1]+f*sin(17*pi/10+wr);
  klPent1[5,2]:=m1[2]*Koord1[2,2]+f*cos(17*pi/10+wr)*Koord1[3,2]+f*sin(17*pi/10+wr);
  klPent1[5,3]:=m1[3]*Koord1[2,3]+f*cos(17*pi/10+wr)*Koord1[3,3]+f*sin(17*pi/10+wr);
  klPent2[1,1]:=m2[1]*Koord2[2,1]+f*cos(pi/10+wr)*Koord2[3,1]+f*sin(pi/10+wr);
  klPent2[1,2]:=m2[2]*Koord2[2,2]+f*cos(pi/10+wr)*Koord2[3,2]+f*sin(pi/10+wr);
  klPent2[1,3]:=m2[3]*Koord2[2,3]+f*cos(pi/10+wr)*Koord2[3,3]+f*sin(pi/10+wr);
  klPent2[2,1]:=m2[1]*Koord2[2,1]+f*cos(pi/2+wr)*Koord2[3,1]+f*sin(pi/2+wr);
  klPent2[2,2]:=m2[2]*Koord2[2,2]+f*cos(pi/2+wr)*Koord2[3,2]+f*sin(pi/2+wr);
  klPent2[2,3]:=m2[3]*Koord2[2,3]+f*cos(pi/2+wr)*Koord2[3,3]+f*sin(pi/2+wr);
  klPent2[3,1]:=m2[1]*Koord2[2,1]+f*cos(9*pi/10+wr)*Koord2[3,1]+f*sin(9*pi/10+wr);
  klPent2[3,2]:=m2[2]*Koord2[2,2]+f*cos(9*pi/10+wr)*Koord2[3,2]+f*sin(9*pi/10+wr);
  klPent2[3,3]:=m2[3]*Koord2[2,3]+f*cos(9*pi/10+wr)*Koord2[3,3]+f*sin(9*pi/10+wr);
  klPent2[4,1]:=m2[1]*Koord2[2,1]+f*cos(13*pi/10+wr)*Koord2[3,1]+f*sin(13*pi/10+wr);
  klPent2[4,2]:=m2[2]*Koord2[2,2]+f*cos(13*pi/10+wr)*Koord2[3,2]+f*sin(13*pi/10+wr);
  klPent2[4,3]:=m2[3]*Koord2[2,3]+f*cos(13*pi/10+wr)*Koord2[3,3]+f*sin(13*pi/10+wr);
  klPent2[5,1]:=m2[1]*Koord2[2,1]+f*cos(17*pi/10+wr)*Koord2[3,1]+f*sin(17*pi/10+wr);
  klPent2[5,2]:=m2[2]*Koord2[2,2]+f*cos(17*pi/10+wr)*Koord2[3,2]+f*sin(17*pi/10+wr);
  klPent2[5,3]:=m2[3]*Koord2[2,3]+f*cos(17*pi/10+wr)*Koord2[3,3]+f*sin(17*pi/10+wr);
  klPent3[1,1]:=m3[1]*Koord3[2,1]+f*cos(pi/10+wr)*Koord3[3,1]+f*sin(pi/10+wr);
  klPent3[1,2]:=m3[2]*Koord3[2,2]+f*cos(pi/10+wr)*Koord3[3,2]+f*sin(pi/10+wr);
  klPent3[1,3]:=m3[3]*Koord3[2,3]+f*cos(pi/10+wr)*Koord3[3,3]+f*sin(pi/10+wr);
  klPent3[2,1]:=m3[1]*Koord3[2,1]+f*cos(pi/2+wr)*Koord3[3,1]+f*sin(pi/2+wr);
  klPent3[2,2]:=m3[2]*Koord3[2,2]+f*cos(pi/2+wr)*Koord3[3,2]+f*sin(pi/2+wr);
  klPent3[2,3]:=m3[3]*Koord3[2,3]+f*cos(pi/2+wr)*Koord3[3,3]+f*sin(pi/2+wr);
  klPent3[3,1]:=m3[1]*Koord3[2,1]+f*cos(9*pi/10+wr)*Koord3[3,1]+f*sin(9*pi/10+wr);
  klPent3[3,2]:=m3[2]*Koord3[2,2]+f*cos(9*pi/10+wr)*Koord3[3,2]+f*sin(9*pi/10+wr);
  klPent3[3,3]:=m3[3]*Koord3[2,3]+f*cos(9*pi/10+wr)*Koord3[3,3]+f*sin(9*pi/10+wr);
  klPent3[4,1]:=m3[1]*Koord3[2,1]+f*cos(13*pi/10+wr)*Koord3[3,1]+f*sin(13*pi/10+wr);
  klPent3[4,2]:=m3[2]*Koord3[2,2]+f*cos(13*pi/10+wr)*Koord3[3,2]+f*sin(13*pi/10+wr);
  klPent3[4,3]:=m3[3]*Koord3[2,3]+f*cos(13*pi/10+wr)*Koord3[3,3]+f*sin(13*pi/10+wr);
  klPent3[5,1]:=m3[1]*Koord3[2,1]+f*cos(17*pi/10+wr)*Koord3[3,1]+f*sin(17*pi/10+wr);
  klPent3[5,2]:=m3[2]*Koord3[2,2]+f*cos(17*pi/10+wr)*Koord3[3,2]+f*sin(17*pi/10+wr);
  klPent3[5,3]:=m3[3]*Koord3[2,3]+f*cos(17*pi/10+wr)*Koord3[3,3]+f*sin(17*pi/10+wr);
end;

procedure Entfernungen;      {Bestimmung der Entfernungen}
begin
  da:=sqrt((klPent1[1,1]-klPent1[2,1])2+(klPent1[1,2]-klPent1[2,2])2+(klPent1[1,3]-klPent1[2,3])2);
  db:=sqrt((klPent1[3,1]-klPent1[2,1])2+(klPent1[3,2]-klPent1[2,2])2+(klPent1[3,3]-klPent1[2,3])2);
  dc:=sqrt((klPent2[1,1]-klPent2[2,1])2+(klPent2[1,2]-klPent2[2,2])2+(klPent2[1,3]-klPent2[2,3])2);
  dd:=sqrt((klPent2[1,1]-klPent2[5,1])2+(klPent2[1,2]-klPent2[5,2])2+(klPent2[1,3]-klPent2[5,3])2);
  de:=sqrt((klPent3[1,1]-klPent3[2,1])2+(klPent3[1,2]-klPent3[2,2])2+(klPent3[1,3]-klPent3[2,3])2);
  df:=sqrt((klPent3[1,1]-klPent3[5,1])2+(klPent3[1,2]-klPent3[5,2])2+(klPent3[1,3]-klPent3[5,3])2);
  dg:=sqrt((klPent1[1,1]-klPent2[2,1])2+(klPent1[1,2]-klPent2[2,2])2+(klPent1[1,3]-klPent2[2,3])2);
  dh:=sqrt((klPent1[2,1]-klPent2[1,1])2+(klPent1[2,2]-klPent2[1,2])2+(klPent1[2,3]-klPent2[1,3])2);
  di:=sqrt((klPent1[2,1]-klPent3[1,1])2+(klPent1[2,2]-klPent3[1,2])2+(klPent1[2,3]-klPent3[1,3])2);
  dj:=sqrt((klPent1[3,1]-klPent3[5,1])2+(klPent1[3,2]-klPent3[5,2])2+(klPent1[3,3]-klPent3[5,3])2);
  dk:=sqrt((klPent2[1,1]-klPent3[1,1])2+(klPent2[1,2]-klPent3[1,2])2+(klPent2[1,3]-klPent3[1,3])2);
  dl:=sqrt((klPent2[5,1]-klPent3[2,1])2+(klPent2[5,2]-klPent3[2,2])2+(klPent2[5,3]-klPent3[2,3])2);
  dm:=sqrt((klPent1[1,1]-klPent2[1,1])2+(klPent1[1,2]-klPent2[1,2])2+(klPent1[1,3]-klPent2[1,3])2);
  dn:=sqrt((klPent1[2,1]-klPent3[5,1])2+(klPent1[2,2]-klPent3[5,2])2+(klPent1[2,3]-klPent3[5,3])2);
  dp:=sqrt((klPent2[5,1]-klPent3[1,1])2+(klPent2[5,2]-klPent3[1,2])2+(klPent2[5,3]-klPent3[1,3])2);
end;

      { H A U P T P R O G R A M M }

begin
  e:=(sqrt(5)-1)/2;

      {Koordinaten der grossen Pentagone als Konstanten}

  grPent1[1,1]:=0;      grPent1[1,2]:=-e;      grPent1[1,3]:=1+e;
  grPent1[2,1]:= 0;      grPent1[2,2]:= e;      grPent1[2,3]:=1+e;
  grPent1[3,1]:= 1;      grPent1[3,2]:= 1;      grPent1[3,3]:= 1;
  grPent1[4,1]:=1+e;      grPent1[4,2]:= 0;      grPent1[4,3]:= e;

```

```

grPent1[5,1]:= 1;   grPent1[5,2]:=-1;   grPent1[5,3]:= 1;
grPent2[1,1]:= 0;   grPent2[1,2]:= e;   grPent2[1,3]:=1+e;
grPent2[2,1]:= 0;   grPent2[2,2]:=-e;   grPent2[2,3]:=1+e;
grPent2[3,1]:=-1;   grPent2[3,2]:=-1;   grPent2[3,3]:= 1;
grPent2[4,1]:=-1-e; grPent2[4,2]:= 0;   grPent2[4,3]:= e;
grPent2[5,1]:=-1;   grPent2[5,2]:= 1;   grPent2[5,3]:= 1;
grPent3[1,1]:= 0;   grPent3[1,2]:= e;   grPent3[1,3]:=1+e;
grPent3[2,1]:=-1;   grPent3[2,2]:= 1;   grPent3[2,3]:= 1;
grPent3[3,1]:=-e;   grPent3[3,2]:=1+e;   grPent3[3,3]:= 0;
grPent3[4,1]:= e;   grPent3[4,2]:=1+e;   grPent3[4,3]:= 0;
grPent3[5,1]:= 1;   grPent3[5,2]:= 1;   grPent3[5,3]:= 1;

{Koordinaten der Flaechenmittelpunkte als Konstanten}

m1[1] :=(3+e)/5;m1[2]:=0;m1[3] :=(4+3*e)/5;
m2[1] :=-(3+e)/5;m2[2]:=0;m2[3] :=(4+3*e)/5;
m3[1] :=0;m3[2] :=(4+3*e)/5;m3[3] :=(3+e)/5;

{Transformationen fuer die Drehung}

Koord1[1,1]:=m1[1]/sqrt(sqrt(m1[1])*sqrt(m1[3]));
Koord1[1,2]:=0;
Koord1[1,3]:=m1[3]/sqrt(sqrt(m1[1])*sqrt(m1[3]));
Koord1[2,1]:=0;
Koord1[2,2]:=1;
Koord1[2,3]:=0;
Koord1[3,1]:=-Koord1[1,3];
Koord1[3,2]:=0;
Koord1[3,3]:=Koord1[1,1];
Koord2[1,1]:=-Koord1[1,1];
Koord2[1,2]:=0;
Koord2[1,3]:=Koord1[1,3];
Koord2[2,1]:=0;
Koord2[2,2]:=-1;
Koord2[2,3]:=0;
Koord2[3,1]:=-Koord1[1,3];
Koord2[3,2]:=0;
Koord2[3,3]:=-Koord1[1,1];
Koord3[1,1]:=0;
Koord3[1,2]:=m3[2]/sqrt(sqrt(m3[2])*sqrt(m3[3]));
Koord3[1,3]:=m3[3]/sqrt(sqrt(m3[2])*sqrt(m3[3]));
Koord3[2,1]:=1;
Koord3[2,2]:=0;
Koord3[2,3]:=0;
Koord3[3,1]:=0;
Koord3[3,2]:=-Koord3[1,3];
Koord3[3,3]:=-Koord3[1,2];

{2-dimensionales Pentagon}

Pentagon2d[1,1]:=cos(pi/10);   Pentagon2d[1,2]:=sin(pi/10);
Pentagon2d[2,1]:=cos(pi/2);   Pentagon2d[2,2]:=sin(pi/2);
Pentagon2d[3,1]:=cos(9*pi/10); Pentagon2d[3,2]:=sin(9*pi/10);
Pentagon2d[4,1]:=cos(13*pi/10);Pentagon2d[4,2]:=sin(13*pi/10);
Pentagon2d[5,1]:=cos(17*pi/10);Pentagon2d[5,2]:=sin(17*pi/10);

k:=0.5;w:=0;           {Startwerte}

{k:=0.69482096015220008;w:=13.106403376935797;} {Zielergebnisse(vorher nicht bekannt)}

repeat
wr:=w/180*pi;
f:=k/2*sqrt(1+sqrt(cos(pi/5))/sqrt(sin(pi/5)));

{Drehung der kleinen Pentagone}

klPent1[1,1]:=m1[1]+Koord1[2,1]*f*cos(7*pi/10+wr)+Koord1[3,1]*f*sin(7*pi/10+wr);
klPent1[1,2]:=m1[2]+Koord1[2,2]*f*cos(7*pi/10+wr)+Koord1[3,2]*f*sin(7*pi/10+wr);
klPent1[1,3]:=m1[3]+Koord1[2,3]*f*cos(7*pi/10+wr)+Koord1[3,3]*f*sin(7*pi/10+wr);
klPent1[2,1]:=m1[1]+Koord1[2,1]*f*cos(3*pi/10+wr)+Koord1[3,1]*f*sin(3*pi/10+wr);
klPent1[2,2]:=m1[2]+Koord1[2,2]*f*cos(3*pi/10+wr)+Koord1[3,2]*f*sin(3*pi/10+wr);
klPent1[2,3]:=m1[3]+Koord1[2,3]*f*cos(3*pi/10+wr)+Koord1[3,3]*f*sin(3*pi/10+wr);
klPent1[3,1]:=m1[1]+Koord1[2,1]*f*cos(19*pi/10+wr)+Koord1[3,1]*f*sin(19*pi/10+wr);
klPent1[3,2]:=m1[2]+Koord1[2,2]*f*cos(19*pi/10+wr)+Koord1[3,2]*f*sin(19*pi/10+wr);
klPent1[3,3]:=m1[3]+Koord1[2,3]*f*cos(19*pi/10+wr)+Koord1[3,3]*f*sin(19*pi/10+wr);
klPent1[4,1]:=m1[1]+Koord1[2,1]*f*cos(15*pi/10+wr)+Koord1[3,1]*f*sin(15*pi/10+wr);
klPent1[4,2]:=m1[2]+Koord1[2,2]*f*cos(15*pi/10+wr)+Koord1[3,2]*f*sin(15*pi/10+wr);
klPent1[4,3]:=m1[3]+Koord1[2,3]*f*cos(15*pi/10+wr)+Koord1[3,3]*f*sin(15*pi/10+wr);
klPent1[5,1]:=m1[1]+Koord1[2,1]*f*cos(11*pi/10+wr)+Koord1[3,1]*f*sin(11*pi/10+wr);
klPent1[5,2]:=m1[2]+Koord1[2,2]*f*cos(11*pi/10+wr)+Koord1[3,2]*f*sin(11*pi/10+wr);
klPent1[5,3]:=m1[3]+Koord1[2,3]*f*cos(11*pi/10+wr)+Koord1[3,3]*f*sin(11*pi/10+wr);
klPent2[1,1]:=m2[1]+Koord2[2,1]*f*cos(13*pi/10+wr)+Koord2[3,1]*f*sin(13*pi/10+wr);
klPent2[1,2]:=m2[2]+Koord2[2,2]*f*cos(13*pi/10+wr)+Koord2[3,2]*f*sin(13*pi/10+wr);
klPent2[1,3]:=m2[3]+Koord2[2,3]*f*cos(13*pi/10+wr)+Koord2[3,3]*f*sin(13*pi/10+wr);
klPent2[2,1]:=m2[1]+Koord2[2,1]*f*cos(17*pi/10+wr)+Koord2[3,1]*f*sin(17*pi/10+wr);
klPent2[2,2]:=m2[2]+Koord2[2,2]*f*cos(17*pi/10+wr)+Koord2[3,2]*f*sin(17*pi/10+wr);
klPent2[2,3]:=m2[3]+Koord2[2,3]*f*cos(17*pi/10+wr)+Koord2[3,3]*f*sin(17*pi/10+wr);
klPent2[3,1]:=m2[1]+Koord2[2,1]*f*cos(pi/10+wr)+Koord2[3,1]*f*sin(pi/10+wr);
klPent2[3,2]:=m2[2]+Koord2[2,2]*f*cos(pi/10+wr)+Koord2[3,2]*f*sin(pi/10+wr);
klPent2[3,3]:=m2[3]+Koord2[2,3]*f*cos(pi/10+wr)+Koord2[3,3]*f*sin(pi/10+wr);
klPent2[4,1]:=m2[1]+Koord2[2,1]*f*cos(5*pi/10+wr)+Koord2[3,1]*f*sin(5*pi/10+wr);

```

```

klPent2[4,2]:=m2[2]*Koord2[2,2]*f*cos(5*pi/10+wr)+Koord2[3,2]*f*sin(5*pi/10+wr);
klPent2[4,3]:=m2[3]*Koord2[2,3]*f*cos(5*pi/10+wr)+Koord2[3,3]*f*sin(5*pi/10+wr);
klPent2[5,1]:=m2[1]*Koord2[2,1]*f*cos(9*pi/10+wr)+Koord2[3,1]*f*sin(9*pi/10+wr);
klPent2[5,2]:=m2[2]*Koord2[2,2]*f*cos(9*pi/10+wr)+Koord2[3,2]*f*sin(9*pi/10+wr);
klPent2[5,3]:=m2[3]*Koord2[2,3]*f*cos(9*pi/10+wr)+Koord2[3,3]*f*sin(9*pi/10+wr);
klPent3[1,1]:=m3[1]*Koord3[2,1]*f*cos(5*pi/10+wr)+Koord3[3,1]*f*sin(5*pi/10+wr);
klPent3[1,2]:=m3[2]*Koord3[2,2]*f*cos(5*pi/10+wr)+Koord3[3,2]*f*sin(5*pi/10+wr);
klPent3[1,3]:=m3[3]*Koord3[2,3]*f*cos(5*pi/10+wr)+Koord3[3,3]*f*sin(5*pi/10+wr);
klPent3[2,1]:=m3[1]*Koord3[2,1]*f*cos(9*pi/10+wr)+Koord3[3,1]*f*sin(9*pi/10+wr);
klPent3[2,2]:=m3[2]*Koord3[2,2]*f*cos(9*pi/10+wr)+Koord3[3,2]*f*sin(9*pi/10+wr);
klPent3[2,3]:=m3[3]*Koord3[2,3]*f*cos(9*pi/10+wr)+Koord3[3,3]*f*sin(9*pi/10+wr);
klPent3[3,1]:=m3[1]*Koord3[2,1]*f*cos(13*pi/10+wr)+Koord3[3,1]*f*sin(13*pi/10+wr);
klPent3[3,2]:=m3[2]*Koord3[2,2]*f*cos(13*pi/10+wr)+Koord3[3,2]*f*sin(13*pi/10+wr);
klPent3[3,3]:=m3[3]*Koord3[2,3]*f*cos(13*pi/10+wr)+Koord3[3,3]*f*sin(13*pi/10+wr);
klPent3[4,1]:=m3[1]*Koord3[2,1]*f*cos(17*pi/10+wr)+Koord3[3,1]*f*sin(17*pi/10+wr);
klPent3[4,2]:=m3[2]*Koord3[2,2]*f*cos(17*pi/10+wr)+Koord3[3,2]*f*sin(17*pi/10+wr);
klPent3[4,3]:=m3[3]*Koord3[2,3]*f*cos(17*pi/10+wr)+Koord3[3,3]*f*sin(17*pi/10+wr);
klPent3[5,1]:=m3[1]*Koord3[2,1]*f*cos(pi/10+wr)+Koord3[3,1]*f*sin(pi/10+wr);
klPent3[5,2]:=m3[2]*Koord3[2,2]*f*cos(pi/10+wr)+Koord3[3,2]*f*sin(pi/10+wr);
klPent3[5,3]:=m3[3]*Koord3[2,3]*f*cos(pi/10+wr)+Koord3[3,3]*f*sin(pi/10+wr);
writeln(' W: ',w:23:21);

{wahlweise Ausgabe der Koordinaten}

( writeln('4gr p1 ',grPent1[1,1]:16:14,' ',grPent1[1,2]:16:14,' ',grPent1[1,3]:16:14);
  writeln('4kl P1 ',klPent1[1,1]:16:14,' ',klPent1[1,2]:16:14,' ',klPent1[1,3]:16:14);
  writeln('4gr p2 ',grPent1[2,1]:16:14,' ',grPent1[2,2]:16:14,' ',grPent1[2,3]:16:14);
  writeln('4kl P2 ',klPent1[2,1]:16:14,' ',klPent1[2,2]:16:14,' ',klPent1[2,3]:16:14);
  writeln('4gr p3 ',grPent1[3,1]:16:14,' ',grPent1[3,2]:16:14,' ',grPent1[3,3]:16:14);
  writeln('4kl P3 ',klPent1[3,1]:16:14,' ',klPent1[3,2]:16:14,' ',klPent1[3,3]:16:14);
  writeln('4gr p4 ',grPent1[4,1]:16:14,' ',grPent1[4,2]:16:14,' ',grPent1[4,3]:16:14);
  writeln('4kl P4 ',klPent1[4,1]:16:14,' ',klPent1[4,2]:16:14,' ',klPent1[4,3]:16:14);
  writeln('4gr p5 ',grPent1[5,1]:16:14,' ',grPent1[5,2]:16:14,' ',grPent1[5,3]:16:14);
  writeln('4kl P5 ',klPent1[5,1]:16:14,' ',klPent1[5,2]:16:14,' ',klPent1[5,3]:16:14);
  writeln('2gr p1 ',grPent2[1,1]:16:14,' ',grPent2[1,2]:16:14,' ',grPent2[1,3]:16:14);
  writeln('2kl P1 ',klPent2[1,1]:16:14,' ',klPent2[1,2]:16:14,' ',klPent2[1,3]:16:14);
  writeln('2gr p2 ',grPent2[2,1]:16:14,' ',grPent2[2,2]:16:14,' ',grPent2[2,3]:16:14);
  writeln('2kl P2 ',klPent2[2,1]:16:14,' ',klPent2[2,2]:16:14,' ',klPent2[2,3]:16:14);
  writeln('2gr p3 ',grPent2[3,1]:16:14,' ',grPent2[3,2]:16:14,' ',grPent2[3,3]:16:14);
  writeln('2kl P3 ',klPent2[3,1]:16:14,' ',klPent2[3,2]:16:14,' ',klPent2[3,3]:16:14);
  writeln('2gr p4 ',grPent2[4,1]:16:14,' ',grPent2[4,2]:16:14,' ',grPent2[4,3]:16:14);
  writeln('2kl P4 ',klPent2[4,1]:16:14,' ',klPent2[4,2]:16:14,' ',klPent2[4,3]:16:14);
  writeln('2gr p5 ',grPent2[5,1]:16:14,' ',grPent2[5,2]:16:14,' ',grPent2[5,3]:16:14);
  writeln('2kl P5 ',klPent2[5,1]:16:14,' ',klPent2[5,2]:16:14,' ',klPent2[5,3]:16:14);
  writeln('3gr p1 ',grPent3[1,1]:16:14,' ',grPent3[1,2]:16:14,' ',grPent3[1,3]:16:14);
  writeln('3kl P1 ',klPent3[1,1]:16:14,' ',klPent3[1,2]:16:14,' ',klPent3[1,3]:16:14);
  writeln('3gr p2 ',grPent3[2,1]:16:14,' ',grPent3[2,2]:16:14,' ',grPent3[2,3]:16:14);
  writeln('3kl P2 ',klPent3[2,1]:16:14,' ',klPent3[2,2]:16:14,' ',klPent3[2,3]:16:14);
  writeln('3gr p3 ',grPent3[3,1]:16:14,' ',grPent3[3,2]:16:14,' ',grPent3[3,3]:16:14);
  writeln('3kl P3 ',klPent3[3,1]:16:14,' ',klPent3[3,2]:16:14,' ',klPent3[3,3]:16:14);
  writeln('3gr p4 ',grPent3[4,1]:16:14,' ',grPent3[4,2]:16:14,' ',grPent3[4,3]:16:14);
  writeln('3kl P4 ',klPent3[4,1]:16:14,' ',klPent3[4,2]:16:14,' ',klPent3[4,3]:16:14);
  writeln('3gr p5 ',grPent3[5,1]:16:14,' ',grPent3[5,2]:16:14,' ',grPent3[5,3]:16:14);
  writeln('3kl P5 ',klPent3[5,1]:16:14,' ',klPent3[5,2]:16:14,' ',klPent3[5,3]:16:14);}

Entfernungen;
{Berechnung der Kantenlaengen der zu den Kanten des
Schraegen Dodekaeders korrespondierenden Kanten}

writeln(' k= ',k:21:19);
writeln('da= ',da:21:19,' dc= ',dc:21:19,' de= ',de:21:19);
writeln('db= ',db:21:19,' dd= ',dd:21:19,' df= ',df:21:19);
writeln('dg= ',dg:21:19,' dh= ',dh:21:19,' di= ',di:21:19);
writeln('dj= ',dj:21:19,' dk= ',dk:21:19,' dl= ',dl:21:19);
writeln('dm= ',dm:21:19,' dn= ',dn:21:19,' dp= ',dp:21:19);
readln('taste');
w:=w+0.1; {+0000000000000000001;}
{Schrittlaenge; dahinter Schrittlaenge beim Zielergebnis}
until w=45('taste'='e');
end.

```

Auch bei diesem Programm erhält man eine Intervallschachtelung.

k_i	m_i	w_i	Δw
0,5	0,8799...	9,98	10^{-2}
0,68995	0,69887	13,0326	10^{-4}
0,69441	0,6951618	13,100183	10^{-6}
0,6947859	0,6948500346	13,10587275	10^{-8}
0,6948179673	0,69482344197	13,1063580804	10^{-10}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
0,69482096015220008	0,69482096015220008	13,106403376935797	10^{-16}

Auch hier können wir wohl sechzehn Nachkomma-Stellen als korrekt annehmen, da mit dem Variablentyp `extended` gerechnet wurde und keine kritischen Berechnungen durchgeführt wurden, die Auslöschung von Nachkomma-Stellen verursachen könnten.

A.4 zum vierten Programm

Dieses Programm habe ich benutzt, um die errechneten Koordinaten zu überprüfen. Das aufgelistete Programm ist beispielhaft mit den Daten des Dodekaeders dargestellt; für andere Polyeder muß nur die Gesamtzahl von Ecken bei der Konstante `mp` und bei dem Array für den Zwischenspeicher `vp` gesetzt werden. Dann können die Koordinaten der Eckpunkte und ein neues Namenskürzel eingegeben werden. Ich empfehle jetzt, die Anzahl der Kanten `mg` auf null zu setzen, die theoretische Kantenlänge einzuschreiben und das Programm einmal mit der Option der Längenberechnung durchlaufen zu lassen. Als Zwischenergebnis erhält man dann nämlich eine Liste von Kanten der richtigen Länge mit der richtigen Numerierung. Diese kann so in den Array `g` übernommen werden. Nach der Korrektur der Anzahl von Kanten kann das Programm normal durchlaufen. Es erscheint der Polyeder auf dem Bildschirm (eventuell Quellverzeichnis des Grafiktreibers – `initgraph...` – ändern) und mit `w1+`, `w2+` und `w3+` können wir jetzt den Polyeder in die drei verschiedenen Richtungen um den eingegebenen Betrag weiter drehen.

Ist man mit der Darstellung der Projektion des Polyeders zufrieden, kann man mit `e` die Rotationphase beenden. Nun werden die 2-dimensionalen Koordinaten der Projektion ausgegeben. Dabei werden diese gleich in der bei EPS-Files üblichen Form auf dem Bildschirm dargestellt. Zu letzt werden die Daten als EPS-File unter dem angegebenen Namen gespeichert.

Die spätere Darstellung der gespeicherten EPS-Files hat meist keine Probleme gemacht, obwohl ich diesen Quellcode durch Ausprobieren nur halbwegs geknackt habe. Allerdings sind die Abbildung in dieser Arbeit nicht mit diesen EPS-Files versehen, sondern aus den vorher auf dem Bildschirm ausgegebenen Daten entstanden (eine nachträgliche Bearbeitung der EPS-Files mit einem Konstruktionsprogramm war leider nicht möglich).

```

program Polyeder1;
uses dos,graph;
type
  vektor = array [0..2] of real;
  geraden = array [0..1] of byte;

{beispielhaft wird der Dodekaeder betrachtet}
const mp:integer = 19;
      {Anzahl der Punkte eines Polyeders}
      mg:integer = 29;
      {Anzahl der Kanten eines Polyeders}
      name:string = 'p12';
      {Name zum Abspeichern als EPS-File}
      {Koordinaten der Ecken:}
p :array [0..19] of vektor =
((-1,-1,-1),(-1,-1,1),(-1,1,-1),(-1,1,1),
(1,-1,-1),(1,-1,1),(1,1,-1),(1,1,1),
(0,1.6180339885,0.6180339885),
(0,1.6180339885,-0.6180339885),
(0,-1.6180339885,0.6180339885),
(0,-1.6180339885,-0.6180339885),
(1.6180339885,0.6180339885,0),
(1.6180339885,-0.6180339885,0),
(-1.6180339885,0.6180339885,0),
(-1.6180339885,-0.6180339885,0),
(0.6180339885,0,1.6180339885),
(-0.6180339885,0,1.6180339885),
(0.6180339885,0,-1.6180339885),
(-0.6180339885,0,-1.6180339885));

      {Kante (r,s) zwischen r-ten und s-ten Punkt}
g :array [0..29] of geraden =
((0,1),(0,15),(0,19),(4,10),(1,15),(1,17),
(2,9),(2,14),(2,19),(3,8),(3,14),(3,17),
(4,11),(4,13),(4,18),(5,10),(5,13),(5,16),
(6,9),(6,12),(6,18),(7,8),(7,12),(7,16),
(8,9),(10,11),(12,13),(14,15),(16,17),(18,19));

var vp :array [0..19] of vektor;
      {Zwischenspeicher f"ur die Punkte}
      g4,gm :integer;
      {Variablen f"ur den Grafiktreiber}
w1,w2,w3 :real;
      {Winkel in xy-,xz- u. yz-Ebene}
ww1,ww2,a,b :string;
      {Strings zur Ausgabe der Zahlen}
ende :boolean;
      {Abbruchvariable}
a1,a2,a3 :real;
      {Drehwinkel}
i :integer;
      {Laufvariable}
test :integer;
      {Testvariable bei String -> Zahl}
Datei1,Datei2 :text;
      {Dateien zur Speicherung als EPS}
year,month,
day,dayname:word;
      {Datumsangaben f"ur EPS-File}
std,min,sec,
hsec :word;
      {Zeitangaben f"ur EPS-File}
Zeile :string;
      {Variable zum Kopieren des
      EPS-Originalkodes}

procedure LaengenBerech;
var ii,jj,ij :integer;
    ll,lk :real;
      {Kontroll-Prozedur, ob auch alle}
      {Kanten wirklich gleich lang sind.}
      {Es werden von allen Kanten, auch}
      {denen quer durch den Polyeder,}
      {die L"angen bestimmt. Von den}
      {Kanten, die der vorgegebenen}
      {L"ange entsprechen, werden die}
      {Nummern der Endpunkte ausgegeben.}
begin
  lk:=0.6666;      {theoretische Kanten"ange}
  writeln;      {vorgeben zum Vergleich.}

ij:=0;
for ii:=0 to mp do
for jj:= ii+1 to mp do
begin
  ll:=sqrt(sqrt(p[ii,0]-p[jj,0])*sqrt(p[ii,1]-p[jj,1])
            +sqrt(p[ii,2]-p[jj,2]));
  if int((ll*10000)/10000)=lk then
      {Bei Gleichheit mit dem theoretischen Wert Ausgabe.}
      begin
        write ('(,ii:3,',',jj:3,')');ij:=ij+1;
        if ij=5 then begin writeln; ij:=0; end;
      end;
  if int((ll*10000)/10000)=0 then
      {Bei Kanten"ange null sind die}
      {Laufvariablen ii u. jj gleich.}
      begin
        writeln;
        writeln (ii:3,' und ',jj:3,' sind gleich. ');
        readln;
      end;
end;
writeln;
end;

procedure Zeichnen1;
var i :integer;
    x1,x2,y1,y2 :integer;
    nr :string;
      {Prozedur zum Zeichnen der gedrehten}
      {Polyeder.}
begin
  {wahlweise Numerierung der Ecken.}
  for i:=0 to mp do
  begin
    x1:=trunc(320*vp [i,0]*80);
    y1:=trunc(240*vp [i,1]*80);
    str(i:2,nr);
    putpixel(x1,y1,14);
    setcolor(14);
    outtextxy(x1+2,y1+2,nr);
  end;
  {Berechnen der Bildschirmkoordinaten von Anfangs- u. Endpunkt.}
  {(Parallelprojektion der 3-d. Koordinaten entlang der 3. Achse auf}
  { die Ebene der 1. und 2. Achse.}
  for i:=0 to mg do begin
    x1:=trunc(320*vp [gi,0],0)*80;
    x2:=trunc(320*vp [gi,1],0)*80;
    y1:=trunc(240*vp [gi,0],1)*80;
    y2:=trunc(240*vp [gi,1],1)*80;
    setcolor (15);
    line (x1,y1,x2,y2);
    {Linie zeichnen. Farbe wei"s(=15)}
  end;
end;

procedure Rechnen1; {x1-Achse}
var i:integer;
    xx,yy,zz:real;
      {Rechen-Prozedur 1: Drehung der}
      {zwischengespeicherten Polyeder-}
      {Daten um die 1. Achse um den}
      {Winkel a1.}
begin
  for i:=0 to mp do begin
    xx:= p[i,0];
    yy:= p[i,1];
    zz:= p[i,2];
    vp[i,0]:=xx;
    vp[i,1]:=yy* cos(a1) +zz*sin(a1);
    vp[i,2]:=-yy*sin(a1) +zz*cos(a1);
  end;
end;

procedure Rechnen2; {x2-Achse}
var i:integer;
    xx,yy,zz:real;

```

```

{Rechen-Prozedur 2: Drehung der}
{zwischen gespeichertem Polyeder}
{Daten um die 2. Achse um den }
{Winkel a2.}

begin
for i:=0 to mp do begin
xx:= vp[i,0];
yy:= vp[i,1];
zz:= vp[i,2];
vp[i,2]:=zz* cos(a2) +xx*sin(a2);
vp[i,0]:=-zz*sin(a2) +xx*cos(a2);
vp[i,1]:=yy;
end;
end;

procedure Rechnen3; {x3-Achse}
var
i:integer;
xx,yy,zz:real;

{Rechen-Prozedur 3: Drehung der}
{zwischen gespeichertem Polyeder}
{Daten um die 3. Achse um den }
{Winkel a3.}

begin
for i:=0 to mp do begin
xx:= vp[i,0];
yy:= vp[i,1];
zz:= vp[i,2];
vp[i,0]:=xx* cos(a3) +yy*sin(a3);
vp[i,1]:=-xx*sin(a3) +yy*cos(a3);
vp[i,2]:=zz;
end;
end;

{H A U P T P R O G R A M M}

begin {wahlweise L"angenberechnung}
{LaengenBerech;}
gd:=detect;
initgraph(gd,gm, 'c:\tp7.0\bgi');
cleardevice;

{Grafikbildschirm initialisieren und l"oschen}

a1:=0.2618; w1:=15;
a2:=0.5236; w2:=30;
a3:=0.1309; w3:=7.5;

{Startwinkel. wx in Grad, ax in rad.}

Rechnen1;Rechnen2;
Rechnen3; {Anfangsdrehung}
Zeichnen1;
ende:=false;
repeat
str(w1:7:4,w2);w1:=w1+w1*Grad w2=';
str(w2:7:4,w2);w1:=w1+w2*Grad w3=';
str(w3:7:4,w2);w1:=w1+w2*Grad';
outtextxy(15,15,w1);

{Ausgabe der Winkel}

readln (a); {Tastaturabfrage}
if copy(a,1,2)='w1' then
{Wenn Eingabe mit "w1" anf"angt,}
{dann w1 um den folgenden Be-}
{trag erh"ohen.}

begin
val(copy(a,4,length(a)-3),w1,test);
a1:=a1+w1/180*pi;w1:=a1*180/pi;
end;
if copy(a,1,2)='w2' then
{...gleiches f"ur Eingabe von "w2"...}

begin
val(copy(a,4,length(a)-3),w2,test);
a2:=a2+w2/180*pi;w2:=a2*180/pi;
end;
if copy(a,1,2)='w3' then
{...und "w3".}

begin
val(copy(a,4,length(a)-3),w3,test);
a3:=a3+w3/180*pi;w3:=a3*180/pi;
end;
cleardevice;
Rechnen1;Rechnen2;Rechnen3;
Zeichnen1;

{Bildschirm l"oschen, neu berechnen,}
{und neu zeichnen.}

ende:=false;
if (a='e') or (w1>360) or
(w2>360)or(w3>360) then ende:=true;

{Abbruch, wenn Eingabe "e" oder Winkel zu gro"s.}

until ende;
closegraph;

{Grafikbildschirm aus.}

for i:=0 to mp do
begin
write (' ',i:2,' ',vp[i,0]*2000+5000:5:0);
writeln (' ',vp[i,1]*2000+5000:5:0);
if ((i+1)/48=int((i+1)/48)) then readln;
end;

{Ausgabe aller Punkte der letzten}
{Zeichnung. Normiert auf 2000,}
{verschoben um 5000.}
{("ubliche Werte f"ur EPS-Files)}

writeln;writeln ('Linien');
writeln;
for i:=0 to mg do
begin
write (' ',i:3,' ',5000+vp [g[i,0],0]*2000:5:0, ' ');
write (5000-vp [g[i,0],1]*2000:5:0);
write ('-')(5000+vp [g[i,1],0]*2000:5:0, ' ');
writeln (5000-vp [g[i,1],1]*2000:5:0, ' ');
if ((i+1)/48=int((i+1)/48)) then readln;
end;

{Ausgabe aller Anfangs- u. Endpunkte}
{aller Linien der letzten Zeichnung.}
{Gleiche Normierung.}

{Jetzt wir die letzte Zeichnung als EPS-File}
{gespeichert.Vorher wurde ein kleines EPS-}
{File mit Editor ge"offnet, die Kopfzeilen am}
{Anfang und die Befehlszeilen am Ende}
{gel"oscht.Der Rest ist unter "eqsquelleps"}
{gespeichert.}

assign (Datei1,'c:\proben\polyeder\'+name+'.eps');
rewrite(Datei1);
assign(Datei2,'c:\proben\epsquelle.txt');
reset(Datei2);
writeln(Datei1,'%IPS-Adobe-3.0 EPSF-3.0');
writeln(Datei1,'%%Title: ',name,'.eps');
writeln(Datei1,'%%Creator: Marco Moeller');
write(Datei1,'%%CreationDate: ');

{neue Kopfzeilen werden geschrieben...}

getdate(year,month,day,dayname);
case dayname of
0 : write(Datei1,'Sun ');
1 : write(Datei1,'Mon ');
2 : write(Datei1,'Tue ');
3 : write(Datei1,'Wed ');
4 : write(Datei1,'Thu ');
5 : write(Datei1,'Fri ');
6 : write(Datei1,'Sat ');
end;
case month of
1 : write(Datei1,'Jan ');
2 : write(Datei1,'Feb ');
3 : write(Datei1,'Mar ');
4 : write(Datei1,'Apr ');
5 : write(Datei1,'May ');
6 : write(Datei1,'Jun ');
7 : write(Datei1,'Jul ');
8 : write(Datei1,'Aug ');
9 : write(Datei1,'Sep ');
10 : write(Datei1,'Oct ');
11 : write(Datei1,'Nov ');
12 : write(Datei1,'Dec ');
end;
write(Datei1,day:2,' ');

```

```

gettime(std,min,sec,hsec);
writeln(Datei1,std:2,':',min:2,':',sec,' ',year:4);
writeln(Datei1,'%BoundingBox: 28 0 255 227');
writeln(Datei1,'%LanguageLevel: 1');
writeln(Datei1,'%Pages: 1');
write (Datei1,'%DocumentProcessColors:');
write (Datei1,' Black');
writeln(Datei1,'%EndComments');
writeln(Datei1,'%BeginProlog');
write (Datei1,'%BeginResource ');
write (Datei1,'procset RangerDict 1 1');
while not eof(Datei2) do
begin
readln(Datei2,Zeile);writeln(Datei1,Zeile);
end;

{Kopieren des Quellkodes (vermutlich)
{Initialisierung der von EPS ben"otigten }
{Treiber etc.}}

close(Datei2);
writeln(Datei1,'%EndProlog');
writeln(Datei1,'%BeginSetup');
write (Datei1,'RangerImage begin RangerDict begin user');
writeln (Datei1,'dict' begin 0 255 tr 0.036 -0.036 sc sctm');
writeln(Datei1,'%EndSetup');
writeln(Datei1,'%Page: 1 1');
writeln(Datei1,'%BeginPageSetup');

writeln(Datei1,'%EndPageSetup');

{Info-Kopf komplett.}
for i:=0 to mg do
begin
write (Datei1,5000+vp [g[i,0],0]*2000:5:0,' ');
write (Datei1,2500+vp [g[i,0],1]*2000:5:0);
write (Datei1,' m ',(vp[g[i,1],0]-vp[g[i,0],0])*2000:5:0,' ');
write (Datei1,(vp[g[i,1],1]-vp[g[i,0],1])*2000:5:0,' r ');
if i=0 then write(Datei1,'false op ');
writeln(Datei1,'0.000 0.000 0.000 0.870 k s');
end;

{Schreiben der EPS-Zeichnungsbe-}
{fehle f"ur die Linien.}

writeln(Datei1,'%PageTrailer'); writeln(Datei1,'%XTrailer');
writeln(Datei1,'end end end'); writeln(Datei1,'%EOF');
close(Datei1);

{schliessen der EPS-Datei.}
readln;
end.

```

B Berechnungen

„Nach Riemanns Vorbild muß man Beweise durch Ideen bezwingen und nicht durch lange Rechnungen.“

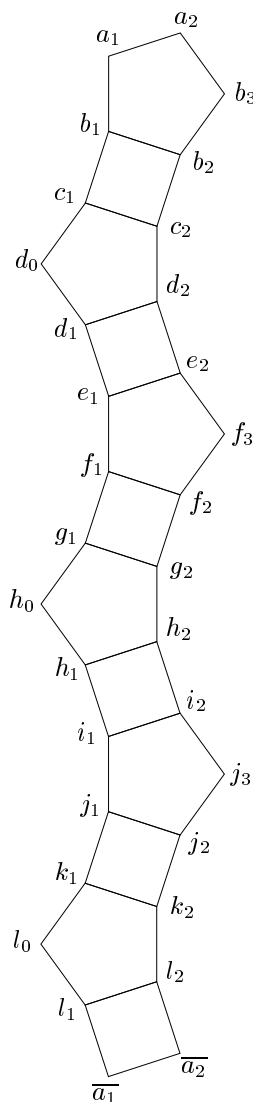
David Hilbert

Hier wird ein Beispiel über die Berechnungen der Koordinaten durch Aufbauen auf schon berechneter Punkte gezeigt mit dem Ziel, die höhere Fehleranfälligkeit zu zeigen. Als Beispiel soll ein Teil des Romben-Ikosi-Dodekaeders (siehe auch Seite 54) berechnet werden.

Berechnet wird einmal um den Polyeder „herum“; angefangen bei einem 5-Eck berechne ich ein angrenzendes 4-Eck und das gegenüberliegende 5-Eck. Jetzt gehe ich von der Ecke des neuen 5-Ecks gegenüber des 4-Ecks aus und berechne das 4-Eck links davon; dann das am neuen 4-Eck gegenüber liegende 5-Eck, an dessen gegenüber liegender Ecke das rechte 4-Eck usw. Immer abwechselnd links und rechts gehend umrunde ich auf diese Weise den ganzen Romben-Ikosi-Dodekaeder auf einer Art „Gürtel“. Auf der Abwicklung auf Seite 79 geht der beschriebene Weg vom obersten 5-Eck immer nach unten bis zum untersten 4-Eck, das an der untersten Kante wieder an das obere 5-Eck stößt.

Zur besseren Orientierung ist der betreffende Weg nebenbei noch einmal dargestellt. Als Variablen für die Ecken sei die obere Kante a , die nächste auf dem Weg b usw. bis l , der vorletzten Kante. Die unterste Kante bezeichne ich als \bar{a} mit dem Hintergedanken, zum Schluß den Abstand der Ecken von a und \bar{a} , die ja theoretisch gleich sein sollten, zu bestimmen. Die Ecken des Weges benenne ich nach den Kanten, wobei die linken Ecken den Index 1 und die rechten den Index 2 bekommen. Bei den 5-Ecken sind die fünften Ecken entweder mit Index 0 oder mit Index 3 beschrieben abhängig, ob sie weiter links oder rechts liegen.

Für die Berechnung sei die Kantenlänge $s=1$. Uns stehen mehrere prinzipiell unterschiedliche Rechenmethoden zur Verfügung. So können wir z.B., ausgehend von einer Kante, Gleichungssysteme für die restlichen Ecken des 5-Ecks aufstellen und lösen. Dann wissen wir, daß angrenzende 4-Ecke – bzw. die zwei Ecken der 4-Ecke, die nicht auch zum 5-Eck gehören, sich auf Kreisen mit Radius 1 und Kreisebene senkrecht zur gemeinsamen Kante von 4-Eck und 5-Eck befinden.



Betrachten wir die Gleichungssysteme zweier Kreise nebeneinander liegen-

der 4-Ecke (mit 3-Eck dazwischen); dann finden wir Abhängigkeiten zwischen ihnen, da mit der dritten 3-Eckskante die Entfernung (=1) der beiden Ecken auf den Kreisen festgelegt wird. Ausgehend von diesen (noch nicht vollständig bestimmten) Ecken können wir weitere Gleichungen der anderen Ecken aufstellen. Letztendlich erhalten wir ein kompliziertes aber eindeutig bestimmtes System von Gleichungen, die allerdings – da sie von Kreisgleichungen stammen – nicht linear, sondern mindestens quadratisch sind. Als Lösung würden wir die Koordinaten aller Ecken erhalten.

Hier werden wir eine andere Rechenmethode anwenden und mit Hilfe trigonometrischer Funktionen und einfacher Vektorrechnung angrenzende Ecken direkt ausrechnen.

Der Innenwinkel eines 5-Ecks beträgt 108° . Seien die ersten beiden Ecken $a_1=(0;0;0)$ und $a_2=(1;0;0)$ und das 5-Eck in der xy -Ebene in der in y -Richtung positiven Halbebene. Dann sind zwei weitere Ecken $b_1=(\cos 108^\circ; \sin 108^\circ; 0)=(-0,3090169944; 0,9510565163; 0)$ und $b_3=(1-\cos 108^\circ; \sin 108^\circ; 0)=(1,3090169944; 0,9510565163; 0)$; die letzte Ecke $b_2=(\cos 108^\circ - \cos 144^\circ; \sin 108^\circ + \sin 144^\circ; 0)=(0,5; 1,538841769; 0)$.

Da an den Ecken des Romben-Ikosi-Dodekaeders je vier Flächen grenzen, ist deren räumliche Anordnung, sprich die Winkel zwischen den Flächen, nicht eindeutig bestimmt. Aber wir wissen, daß dieser Archimedischen Polyeders u.a. aus 5-Kupolas zusammengesetzt ist. Und bei diesen Kupolas stoßen an den „oberen“ Ecken zwar auch vier Flächen zusammen, an der „unteren“ aber nur drei (3,4,10). Da weiterhin Deckel und Boden (also 5- und 10-Eck) parallel sind und wir über den Seitenkosinussatz (Fußnote auf Seite 55) den dihedralen Winkel α zwischen 4-Eck und 10-Eck ausrechnen können, ist der Winkel β zwischen 4-Eck und 5-Eck genau der Ergänzungswinkel. Also $180^\circ - 31,717474411^\circ = 148,282525589^\circ = \beta$ (siehe für α Seite 84).

Daraus folgen die Koordinaten von c_1 und c_2 :
 $c_1=(\cos 108^\circ + \cos 54^\circ \cdot \cos \beta; \sin 108^\circ - \sin 126^\circ \cdot \cos \beta; -\sin \beta)=$
 $(-0,8090169939; 1,639247476; 0,5257311134)$
 $c_2=(0,5 + \cos 54^\circ \cdot \cos \beta; \sin 108^\circ + \sin 144^\circ - \sin 54^\circ \cdot \sin 54^\circ \cdot \cos \beta; -\sin \beta)=$
 $(4,79 \cdot 10^{-10}; 2,227032728; 0,5257311134)$

Jetzt brauchen wir die Entfernung von a_1 nach d_0 . Mit der Richtung von b_1 nach c_1 können wir dann d_0 berechnen. Wir rechnen also den Winkel zwischen b_1c_1 und b_1a_1 aus und projizieren b_1a_1 auf die Gerade durch b_1c_1 . Der doppelte Abstand von der Mitte von b_1c_1 zum Projektionspunkt von a_1 auf die Gerade ist die gesuchte Entfernung $|a_1d_0|$.

Mit $\vec{x} = \overrightarrow{b_1a_1} = a_1 - b_1 = (0,3090169944; -0,9510565163; 0)$ und $\vec{y} = \overrightarrow{b_1c_1} = c_1 - b_1 = (-0,4999999995; 0,6881909597; 0,5257311134)$ folgt $\cos \angle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} = -0,8090169937 \Rightarrow$
 $|a_1d_0| = -2 \cos \angle(\vec{x}, \vec{y}) + 1 = 2,618033989 =: y_{(0)}$.
 $d_0 = y_{(0)} \cdot \overrightarrow{b_1c_1} + a_1 = (-1,309016993; 1,801707323; 1,376381924)$
 $d_2 = y_{(0)} \cdot \overrightarrow{b_1c_1} + b_1 = (0; 2,752763839; 1,376381924)$

Nun berechnen wir e_2 , indem wir von b_2 Richtung des Vektors $\overrightarrow{c_2 d_2}$ gehen um die Länge einer Diagonale des regelmäßigen 10-Ecks (der 5-Kupola!) von einer Ecke zur über-über-nächsten (von b_2 nach e_2). Die Länge dieser Diagonale ist $\sqrt{(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ + \cos 108^\circ)^2 + (\sin 36^\circ + \sin 72^\circ + \sin 108^\circ)^2} = 2,618033989 =: y_{(1)}$. Dann ist $e_2 = y_{(1)} \cdot (d_2 - c_2) + b_2 = (0,4999999987; 2,915223687; 2,227032735)$.

e_1 berechnen wir analog von b_1 entlang $\overrightarrow{c_2 d_2}$ um die Länge der größten 10-Eck-Diagonale. Diese Diagonale ist

$$\left((\cos 0^\circ + \cos 36^\circ + \cos 72^\circ + \cos 108^\circ + \cos 144^\circ)^2 + (\sin 0^\circ + \sin 36^\circ + \sin 72^\circ + \sin 108^\circ + \sin 144^\circ)^2 \right)^{1/2} = 3,236067977 =: y_{(2)}.$$

Dann folgt $e_1 = y_{(2)} \cdot (d_2 - c_2) + b_1 = (-0,309016996; 2,652358129; 2,752763848)$ und auch $d_1 = e_1 + e_2 \overrightarrow{d_2} = (-0,8090169947; 2,489898281; 1,902113037)$.

Jetzt berechnen wir f_1 , f_2 und f_3 . Dazu brauchen wir die Längen von $|d_0 f_1|$ und $|c_1 f_2|$ und die Richtung $\overrightarrow{d_2 e_2}$.

$$|d_0 f_1| = |a_1 d_0| = y_{(0)} \quad \text{und} \quad |c_1 f_2| = |a_2 d_1| = 3,618033989 =: y_{(3)}.$$

$$f_1 = y_{(0)} \cdot (e_2 - d_2) + d_0 = (-0,0000000019; 2,227032727; 3,60341466)$$

$$f_2 = y_{(3)} \cdot (e_2 - d_2) + c_1 = (0,9999999959; 2,227032728; 3,60341466)$$

$$f_3 = y_{(0)} \cdot (e_2 - d_2) + c_2 = (1,309016992; 2,652358132; 2,752763849).$$

Die folgenden Berechnungen folgen analog:

$$g_1 = y_{(1)} \cdot (f_1 - e_1) + d_1 = (-9,68 \cdot 10^{-10}; 1,376381922; 4,129145776)$$

$$g_2 = y_{(2)} \cdot (f_1 - e_1) + d_2 = (0,9999999999; 1,376381926; 4,129145776)$$

$$h_1 = y_{(3)} \cdot (g_2 - f_2) + e_2 = (0,5000000099; -0,1624598238; 4,129145782)$$

$$h_2 = y_{(0)} \cdot (g_2 - f_2) + f_3 = (1,309017; 0,4253254222; 4,129145780)$$

$$h_0 = y_{(0)} \cdot (g_2 - f_2) + e_1 = (-0,3090169879; 0,4253254192; 4,129145779)$$

$$i_2 = y_{(1)} \cdot (h_2 - g_2) + f_2 = (1,809017008; -0,2628655244; 3,60341467)$$

$$i_1 = y_{(2)} \cdot (h_2 - g_2) + f_1 = (1,000000019; -0,8506507693; 3,603414673)$$

$$j_1 = y_{(0)} \cdot (i_1 - h_1) + h_0 = (0,9999997972; -1,376381867; 2,752763867)$$

$$j_2 = y_{(3)} \cdot (i_1 - h_1) + g_1 = (1,809016704; -1,11351631; 2,227032755)$$

$$j_3 = y_{(0)} \cdot (i_1 - h_1) + g_2 = (2,309016785; -0,4253253602; 2,752763864)$$

$$k_1 = y_{(1)} \cdot (j_1 - i_1) + h_1 = (0,4999995183; -1,538841707; 1,902113059)$$

$$k_2 = y_{(2)} \cdot (j_1 - i_1) + h_2 = (1,309016282; -1,275976148; 1,376381947)$$

$$l_1 = y_{(3)} \cdot (k_1 - j_1) + i_2 = (-0,0000009955; -0,8506507474; 0,5257311339)$$

$$l_2 = y_{(0)} \cdot (k_1 - j_1) + i_1 = (0,9999990603; -0,8506507432; 0,5257311359)$$

$$l_0 = y_{(0)} \cdot (k_1 - j_1) + i_1 = (-0,3090177057; -1,275976152; 1,376381945)$$

$$\overline{a_1} = y_{(2)} \cdot (l_2 - k_2) + j_1 = (-0,0000009382; 0,0000000552; 0,0000000176)$$

$$\overline{a_2} = y_{(1)} \cdot (l_2 - k_2) + j_2 = (0,9999991144; 0,0000000561; 0,0000000187)$$

$$|a_1 \overline{a_1}| = 0,0000009399 \approx 10^{-6} \quad |a_2 \overline{a_2}| = 0,0000008875 \approx 10^{-6}.$$

Das Ergebnis ist mit einem Fehler von etwa 10^{-6} behaftet. Wenn wir daran denken, daß während aller Rechnungen auf zehn Stellen gerechnet wurde, ist das ein Verlust von fast vier Stellen. Dagegen sind die Berechnungen des Romben-Ikosi-Dodekaeders ab Seite 54 wesentlich genauer und kürzer.

C elektronische Hilfsmittel

„Man kann sagen, daß wir im Zeitalter der Mathematik leben, daß unsere Kultur ‚mathematisiert‘ worden ist. Nichts beweist das deutlicher als der allgegenwärtige Computer.“

Arthur Jaffe

Dieses Manuskript wurde mit dem Editor *WinShell* (Version 1.3 von Ingo de Boer) auf einem AT/AT kompatiblen Personal-Computer unter *WindowsNT* geschrieben und mit dem Programm \LaTeX druckfertig kompiliert.

Sämtliche Bilder sind mit dem Programm *Micrografx Designer 7.1* von Intern. CorrectSpell, 1994, erstellt worden, wobei die 2-dimensionalen Koordinaten zum größten Teil von dem vierten vorgestellten Programm (Seite 89) errechnet wurden.

Die Programme selber entstanden auf demselben Rechnertyp unter *TurboPascal 7.0* von Borland Intern., 1992.

Die Fotos der Modelle auf Seite 70 wurden mit einer Digitalkamera der Firma *OLYMPUS CAMEDIA C-840L* aufgenommen, die Abbildungen der Mineralien etc. auf Seite 71 mit einem Scanner der Marke *Acer, PRISA 620P* eingescannt und alle mit dem Zeichenprogramm *iPhoto Plus*, Version 1.2 von Ulead Sys. Inc., 1996, bearbeitet.

Und die Berechnungen (u.a. zum Romben-Ikosi-Dodekaeder ab Seite 93) habe ich mit einem *CASIO fx-4200P* im DEG-Modus mit zehn Nachkommastellen durchgeführt.

D Abkürzungen

„ABS UKW BGB EWG CNN AKW MTV NRW KMH BMW FKK
WWW EBS DVD BKA ARD BSE TNT BRD DGB SMS USA BWL
PVC LED SOS IBM ICE PLO VHS IKK USW.“

(frei nach) Die Fantastischen Vier

\vee	mathematisch ODER
\wedge	mathematisch UND
\exists	es existiert
\in	in; Element von
$[l]$	links; linkes Isomer
$[r]$	rechts; rechtes Isomer
$[\text{reg}]$	regulär; reguläres, regelmäßigeres Isomer
$[\text{irreg}]$	irregulär; unregelmäßigeres Isomer
APr_5	5-Antiprisma
C_3	3-Kupola (C=englisch <i>cupola</i>)
C_4	4-Kupola
C_5	5-Kupola
C_8	Kubo-Oktaeder (C=englisch <i>cubo</i>)
gRC_8	Großer Romben-Kubo-Oktaeder
gRI_{12}	Großer Ikosi-Dodekaeder
I_{12}	Ikosi-Dodekaeder
P_4	Tetraeder
P_6	Hexaeder
P_8	Oktaeder
P_{12}	Dodekaeder
P_{20}	Ikosaeder
Pr_8	8-Prisma
Py_4	4-Pyramide
Py_5	5-Pyramide
R_5	5-Rotunda
RC_8	Romben-Kubo-Oktaeder
RI_{12}	Romben-Ikosi-Dodekaeder
RI_{12}^{-3}	RI_{12} ohne drei C_5 , \Rightarrow nicht mehr teilbar.
S_6	Schräger Hexaeder (S=englisch <i>snub</i>)
S_{12}	Schräger Dodekaeder
TP_4	Stumpfer Tetraeder (T=englisch <i>truncated</i>)
TP_6	Stumpfer Hexaeder
TP_8	Stumpfer Oktaeder
TP_{12}	Stumpfer Dodekaeder
TP_{20}	Stumpfer Ikosaeder

E	(Anzahl der) Ecken
F	(Anzahl der) Flächen
K	(Anzahl der) Kanten
bzw.	beziehungsweise
etc.	et cetera, und andere
d.h.	das heißt
lat.	lateinisch
oBdA.	ohne Beschränkung der Allgemeinheit
u.a.	unter anderem
usw.	und so weiter
Sym.	Symmetrie
z.B.	zum Beispiel

Literatur

- [1] Peter R. Cromwell: *Polyhedra*, 1. Aufl., Cambridge University Press, Cambridge 1997
- [2] I.N.Bronstein, K.A.Semendjajew, übers. E.Zeidler, H.R.Schwarz u.a.: *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*, Teil I, B. G. Teubner Verlagsges., Leipzig 1996
- [3] I.N.Bronstein, K.A.Semendjajew, übers. E.Zeidler, H.R.Schwarz u.a.: *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*, Teil II, 7. Aufl., B. G. Teubner Verlagsges., Leipzig 1995
- [4] Johannes Kepler: *Mysterium Cosmographicum*, Tübingen 1595
- [5] Johannes Kepler: *De Nive Sexangula*, Prag 1611
- [6] Johannes Kepler: *Harmonices Mundi*, Linz 1619
- [7] Wenzeln Jamnitzer: *Perspectiva Corporum Regularium*, Nürnberg 1568
- [8] Albrecht Dürer: *Unterweysung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit in Linien Ebenen und Gantzen Corporen*, 1525
- [9] H.S.M. Coxeter: *Introduction to Geometry*, 2. Aufl., Wiley and Sons, 1969
- [10] H.S.M. Coxeter: *Regular Polytopes*, 3. Aufl., Dover, New York 1973
- [11] T.L. Heath: *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, in drei Bänden, Cambridge University Press, Cambridge 1926
- [12] B. Grünbaum, N.W. Johnson: *The Faces of a Regular-faced Polyhedron*, J. London Math. Soc., 1965
- [13] B. Grünbaum: *Convex Polytopes*, Wiley and Sons, 1967
- [14] E. Steinitz: *Polyeder und Raunteilungen*, Encyklopaedie der Math. Wissensch., Teil 3AB12, 1922
- [15] E. Steinitz, H. Rademacher: *Vorlesungen über die Theorie der Polyedern*, Springer Verl., Berlin 1934
- [16] Henri Lebesgue: *Sur l'Équivalence des Polyèdres, en Particulier des Polyèdres Réguliers, et sur la Dissection des Polyèdres Réguliers en Polyèdres Réguliers*, Annales de la Soc. Polonaise de Math., 1938
- [17] M. Berman: *Regular-faced Convex Polyhedra*, J. Franklin Institute, 1979
- [18] N.W. Johnson: *Convex Polyhedra with Regular Faces*, Canadian J. Math., 1966
- [19] E. Sachs: *Die fünf Platonischen Körper*, Weidmann, Berlin 1917

- [20] A.F. Möbius: *Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders*, Königlich-Sächsische Gesellsch. der Wissensch., 1865
- [21] A.D. Alexandroff: *Convexe Polyeder (in Russisch)*, Berlin 1950
- [22] A.L. Cauchy: *Sur les Polygones et Polyèdres (second memoire)*, J. École Polytechnique, 1813
- [23] T. Hugel: *Die regulären und halbrekulären Polyeder*, Neustadt a.d. Halle 1876
- [24] L. Poinso: *Mémoire sur les Polygones et les Polyèdres*, J. École Polytechnique, 1810
- [25] William P. Thurston: *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Vol. 1, Princeton University Press, Princeton 1997
- [26] R. Descartes: *De Solidorum Elementis*, 1630
- [27] L. Euler: *Elementa Doctrinae Solidorum*, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 1758
- [28] C.F. Gauss: *Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas*, Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiones, 1828
- [29] A.M. Legendre: *Éléments de Géométrie*, Paris 1794
- [30] C. Jordan: *Recherches sur les Polyèdres*, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, 1866

Index

- Äquivalenz, 52
- Übersicht (Archimedische Körper), 67, 68
- Übersicht (Platonische Körper), 22
- [irreg], 47
- [reg], 31, 47, 48, 52
- n -Antiprisma, 35
- n -Prisma, 36
- 3-Bipyramide, 11, 23
- 3-Kupola, 31, 32, 47, 52
- 3-Prisma, 34
- 4-Antiprisma, 33
- 4-Kupola, 31, 32, 52
- 4-Pyramide, 19
- 5-Antiprisma, 20, 34
- 5-Kupola, 31, 32, 54, 55, 83, 94
- 5-Pyramide, 20
- 5-Rotunda, 31, 32, 48
- 6-Antiprisma, 35
- 8-Prisma, 52

- Abschneiden, 39–43, 45–47, 49–51, 53, 54, 57
- Abwicklung, 72
- allgemeiner Sprachgebrauch, 12
- alternieren, 27–29
- Antiprismen, 12, 32, 33
- Archimedes, 7, 25
- Archimedische Körper, 7, 8, 10, 12, 13, 22, 25, 26, 30–33, 38–40, 47, 49–52, 54, 63, 67–69, 72, 94
- Archimedische Körper (Definition), 25, 33
- Archimedische Polyeder , *siehe* Archimedische Körper
- Astronomie, 7
- Atom, 15
- Außenseiter, 69

- Bauanleitung, 72
- beschnittene Stumpfe Polyeder, 49
- Bewegung, 12–14, 26, 30
- Bewegung (Definition), 12
- Biluna-Birotunda, 14
- Biologie, 12

- Chaos, 81
- Coxeter, H.S.M., 10

- Dürer, Albrecht, 7
- Deltaeder, 10, 11, 23
- Diagonale, 17
- dihedraler Winkel, 50, 54, 81, 84, 94
- Dodekaeder, 16, 21, 22, 24, 43, 44, 48, 49, 54, 55, 57, 63, 65–68, 89
- Dreh-Symmetrie, 12, 13, 17
- Drehung, 12, 13, 17
- dual, 22, 40, 49
- durchdringende Flächen, 11

- Ebene, 12
- echt-räumlich, 9
- Eck-Figur, 26
- Eck-Konfiguration, 10–13, 16, 23, 24, 26–31, 33, 37, 38, 47, 50, 52
- Eck-Konfiguration (Definition), 26
- Eck-Symmetrie, 18, 22, 41, 42, 46, 52, 54, 68
- Eckdrehung, 13
- Eindeutigkeit der Konstruktion, 28
- Elemente, 7, 15, 23
- Elemente (Definition), 26
- Entzerren, 49–51, 53, 54, 57
- EPS-File, 81, 89
- Euklid, 23
- Euklidische Geometrie, 12
- Euklidischer Anschauungsraum, 10
- Euler, 22
- Eulersche Formel, 22
- extended, 85, 89

- fächerförmig, 72
- Finger, 12
- Fläche (Definition), 9

Flächen-Symmetrie, 22, 42, 48
 flach, 32
 Folklore, 72
 Fußball, 46

 Gürtel, 51, 52
 Galilei, Galileo, 25
 Gemälde, 7
 Genauigkeit, 81, 85
 Genetischer Kode, 15
 Geometer, 15
 geschlossener Teilraum, 9
 Goldener Schnitt (Definition), 19
 Gott, 16
 Großer Romben-Ikosi-Dodekaeder, 38,
 57, 60, 68
 Großer Romben-Kubo-Oktaeder, 38,
 53, 54, 68
 Großer Romben-Kubo-Oktaeder, 54
 Gummi, 49

 halbbregelmäßige Polyeder, 10
 Halbbregelmäßigkeit, 10
 Handschuhe, 13, 14
 Hawkins, Stephen W., 81
 Heptaeder, 11
 Hexaeder, 14, 16–19, 21, 22, 24, 39–
 42, 45–47, 49–51, 53, 54,
 60, 61, 63, 66, 68
 Hilbert, David, 93
 Honeycombs, 10, 11

 Identität, 14, 61, 63
 Ikosaeder, 11, 16, 19–22, 24, 45, 47–
 50, 67, 68
 Ikosi-Dodekaeder, 34, 47–50, 54, 68
 Innenwinkel, 9
 Isomere, 29, 31, 32, 61, 63

 Jaffe, Arthur, 96
 Jamnitzer, Wenzeln, 7

 Kant, Immanuel, 25
 Kanten-Symmetrie, 22, 46–48, 52, 54
 Kantendrehung, 13
 Kantenlänge, 9
 Katalansche Körper, 14

 Kelvins Körper, 43
 Kepler, Johannes W., 7, 25, 33
 Ketten, 67
 Klebelaschen, 72
 Kleben, 72
 Klein, Felix, 15
 kongruent, 14
 kongruent (Definition), 12
 konkav, 10
 Konstruktionsprogramm, 89
 konvex, 10, 12, 26, 27, 32, 33, 38, 47,
 50
 konvex (Definition), 9
 Koordinatenkreuz, 16
 koplanar, 9, 19, 30, 61, 65
 Kubo-Oktaeder, 34, 46–51, 54, 68
 kugelförmig, 32
 Kupola, 31, 32, 47, 52
 Kurzschreibweise, 19, 20, 47, 48, 57,
 67, 68

 Lebesgue, Henri, 15
 Leibniz, Gottfried Wilhelm, 9
 Linie (Definition), 9
 Lord Kelvin, 43

 Millers Körper, 38, 52, 53
 Mineralogie, 12
 Mit-Sich-Selbst-Am-NächstenVerwandt,
 69
 Mitgliederanzahl, 13
 Modelle, 8, 14, 30

 Oktaeder, 11, 16, 18–20, 22, 24, 42,
 47, 49, 63, 68
 orientierter Anschauungsraum, 13,
 30
 Orientierung, 21, 61
 Ornamentierung, 7

 Papiermodelle, 8, 72
 Pappus, 25
 parallele Geraden, 10
 Pederson, j., 7
 Permutation, 21, 39, 40
 perspektivisches Zeichnen, 7

philosophische Frage, 13
 Platon, 7, 15, 16, 23, 25
 Platonische Körper, 7, 8, 12, 13, 15, 17, 22, 23, 26, 32, 33, 39, 40, 49, 52, 63, 67, 69, 72
 Platonische Körper (Definition), 16, 23
 Platonische Polyeder , *siehe* Platonische Körper
 Platons 3-Ecke, 15
 Platons Elemente, 16
 Polyeder (Definition), 9
 Polygon, 25, 26
 Prisma, 12, 32, 33, 52
 Prismen, 32
 Probe, 61
 Programm, 61, 63, 65
 Pseudo-Archimedische Körper, 53
 Pyramide, 19

 Raum, 10
 raumausfüllend, 43
 Rechteck, 50
 regelmäßige Polyeder (Definition), 10
 Regelmäßigkeit, 10
 Riemann, 93
 Romben-Dodekaeder, 8
 Romben-Ikosi-Dodekaeder, 37, 54–57, 65, 68, 83, 93–95
 Romben-Kubo-Oktaeder, 34, 38, 51–54, 61, 68
 Romben-Polyeder, 8, 10, 11
 Rotationsmatrix, 64
 Rotunda, 31, 32, 48

 Schräge Polyeder, 81
 Schräger Dodekaeder, 33, 34, 40, 63, 65, 67, 68, 85
 Schräger Hexaeder, 33, 40, 60–63, 68, 84
 Seiten-3-Eck, 30
 Seitenkosinussatz, 54, 58, 81, 94
 selbst-dual, 13, 22, 49
 Skulpturen, 7
 Sphäre, 10, 15, 30–32, 38, 40–42, 44, 46–48, 51, 54, 56, 57, 60, 62, 67
 sphärische 3-Ecke, 54, 58
 Spiegel-Symmetrie, 12, 17
 Spiegelung, 12, 13, 26, 61, 63
 Spitzen-3-Eck, 30, 63, 67
 Sport, 46
 stellare Polyeder, 8, 11
 Stewart, Ian, 9
 Streckung, 14
 Stumpfe Polyeder, 49
 Stumpfer Dodekaeder, 36, 43, 44, 68
 Stumpfer Hexaeder, 36, 41, 42, 46, 68
 Stumpfer Ikosaeder, 36, 45–47, 68
 Stumpfer Oktaeder, 36, 42, 43, 68
 Stumpfer Tetraeder, 13, 35, 40, 41, 49, 68, 69
 Symmetrie, 8, 12, 13, 17, 19, 21, 22, 30, 31, 39–48, 52, 54, 60, 61, 63, 66–69

 Tetraeder, 11, 13, 16–18, 22–24, 40, 49, 69
 Thomson, William, 43
 Topologie, 15
 Translation, 12

 Umgebung, 13, 25, 26, 28, 50
 Umgebung (Definition), 26
 Umlaufrichtung, 26
 Unterfamilie, 68

 Variablentyp, 85, 89
 Verdrehung, 31
 Vergil, 72
 Verschiebung, 12
 Vertex-Figur, 26, 49, 50

 Würfel , *siehe* Hexaeder
 Winkelkosinussatz, 58, 81
 Winkelsumme, 23, 24, 26, 27, 29, 33–38, 49